Über Flächen zweiter Ordnung

Schmidle, Wilhelm

Baden-Baden, 1887

urn:nbn:de:bsz:31-304328

Über
Flächen zweiter Ordnung.

Ein Beitrag zu deren Theorie

von

†
Wilhelm Schmidle
Lehramtspraktikant.

Beilage zum Programm des Gymnasiums in Baden.

1887. No. 560.

BADEN-BADEN.
A. v. Hagen'sche Hofbuchdruckerei (Weber & Kölblin).
1887.

In den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ beweist von Staudt pag. 28 folgenden Satz:

„Wenn ein System F von Punkten mit dem ebenen System U nur den Punkt S, mit jeder andern durch diesen Punkt gehenden Ebene aber nur eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar nur die in der Kurve liegenden Punkte gemein hat, so ist das System F nichts anderes als der Inbegriff aller Punkte, welche in ein und derselben Fläche zweiter Ordnung, die im Punkte S die Ebene U berührt, enthalten sind.“

Dieser Satz, welcher einen Teil der Flächen zweiter Ordnung auf höchst anschauliche Weise definiert, ist als Ausgangspunkt für eine Theorie der Flächen zweiter Ordnung in den folgenden Zeilen gewählt worden.

Wir nennen das Gebilde, welches durch das oben gegebene Punktsystem F bestimmt ist, bis auf Weiteres einen Komplex und setzen vorerst die Existenz eines derartigen Punktkomplexes voraus.

Aus der Definition ergiebt sich folgende Einteilung der Komplexe:

I. Komplexe, bei welchen nur nicht zerfallende Kegelschnitte durch die Ebene durch S ausgeschnitten werden.

II. Komplexe, bei welchen eventuell neben Kegelschnitten noch Linienpaare, aber keine Punktepaare vorkommen.

III. Komplexe, bei welchen neben Kurven zweiten Grades und Linienpaaren auch Punktepaare ausgeschnitten werden können.

Wir untersuchen zuerst die Gebilde der letzten Art. — Zu ihnen gehört offenbar der Punkt S allein an und für sich. Denn jede Ebene durch ihn schneidet dann S als Doppelpunkt aus.

Der zweite einfachste Fall bestünde darin, dass jede Ebene ein Punktepaar ausschneidet, also jede Ebene ausser S noch einen zweiten Punkt, einige vielleicht auch S als Doppelpunkt. Nehmen wir an, es schneide die Ebene α das Punktepaar S, A aus und ebenso β die Punkte S und B. Durch S, A, B lässt sich dann immer eine dritte Ebene legen, welche kein Punktepaar aus dem Komplexe ausschneidet, da sie schon drei Punkte desselben enthält. Es kann also höchstens in einem Komplexe eine Ebene ein wirkliches Punktepaar ausschneiden. Und sollen überhaupt keine Kegelschnitte oder Linienpaare ausgeschnitten werden, so müssen die übrigen Ebenen S als Doppelpunkt enthalten. Das durch den Komplex dargestellte Gebilde ist somit ein Punktepaar im Raum.

Der nächste Fall, der zur Besprechung kommt, ist derjenige, dass in einem Komplexe neben Punktepaaren und Doppelpunkten nur noch Linienpaare resp. Doppellinien vorkommen. Zunächst ist leicht zu sehen, dass Linienpaare und Doppellinien neben eigentlichen Doppelpunkten nicht vorkommen können. Denn schneide α wieder das Punktepaar S, A aus und β das Linienpaar (resp. Doppellinie) $\mathfrak{B}$, so lässt sich durch eine der beiden Linien von $\mathfrak{B}$ und durch A immer eine Ebene γ hindurch legen, welche α in der Linie SA schneidet; da diese Ebene γ schon eine Linie und den Punkt A mit dem Komplexe gemein hat, so müsste sie notwendig denselben ebenfalls in den Geraden SA schneiden. Das ist jedoch unmöglich, da sonst α nicht das Punktepaar S, A, sondern die Linie SA ausschneiden müsste. Unsere Untersuchung beschränkt sich desshalb auf den Fall, dass blos S als Doppelpunkt und ausserdem noch Doppellinien und Linienpaare vorkommen. Schneidet nun blos eine Ebene ein Linienpaar resp. eine Doppellinie aus, alle andern blos S als Doppelpunkt, so stellt der Komplex eine Doppellinie resp. ein Linienpaar dar, dessen Linien in S sich schneiden. Setzen wir fest, dass, wenn eine Ebene blos eine Linie ausschneidet, diese als Doppellinie aufgefasst werden kann, so kann der Komplex eine beliebige Anzahl Gerader darstellen, von welchen höchstens zwei in einer Ebene liegen, und die alle in S sich schneiden, ohne auf σ zu liegen. Diese Anzahl kann auch unendlich sein — und in diesem Falle kann der Komplex einen Kegel darstellen, welcher nur so beschaffen sein muss, dass jede durch seine Spitze gehende Ebene, die noch einen Punkt mit demselben gemein hat, zwei resp. eine Gerade ausschneidet. Der Projektionskegel einer beliebigen ovalen Kurve von S aus, welcher von jeder Linie ihrer Ebene in höchstens zwei Punkten geschnitten wird, stellt dann einen Komplex dar, ohne gerade einen Kegel zweiter Ordnung sein zu müssen.

Nach diesen Spezialfällen gehen wir jetzt zur Besprechung des allgemeinsten Falles, dass in einem Komplexe der dritten Art neben diesen zerfallenden Kurven zweiten Grades wirkliche Kegelschnitte vorkommen sollen. Ich behaupte:

Es ist nicht möglich, dass in einem Komplexe neben Kegelschnitten zugleich Linienpaare (resp. Doppellinien) ausgeschnitten werden und umgekehrt.

Denn nehmen wir an, es schnitte die Ebene α den Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ aus, während β das Linienpaar $\mathfrak{B}$ ausschneiden würde. Durch eine der beiden Geraden von $\mathfrak{B}$ (resp. durch die Doppellinie) könnten wir dann beliebig viele Ebenen legen, welche den Kegelschnitt $\mathfrak{A}$ ausser in S in noch einem andern Punkte schneiden. Alle diese Ebenen müssen dann wieder ein Linienpaar ausschneiden, da sie eine Gerade schon mit dem Komplexe gemein haben und ausserdem noch einen Punkt des Kegelschnittes $\mathfrak{A}$. Die andern Geraden müssten durch S und diese Punkte hindurch gehen, — somit in der Ebene α liegen, was unmöglich ist. Denn α würde dann ausser $\mathfrak{A}$ noch beliebig viele durch S gehende Gerade ausschneiden. Es können desshalb neben Punktepaaren entweder nur Gerade oder nur Kegelschnitte, die nicht zerfallen, ausgeschnitten werden. Der erste Fall ist bereits untersucht, wir sahen, dass selbst unendlich viele Gerade ausgeschnitten werden können. Im Gegensatz dazu gilt bei dem zweiten der Satz:

Es giebt blos eine Ebene in einem Komplexe, bei welchem Punktepaare ausgeschnitten werden, welche mit dem Komplexe eine wirkliche Kurve zweiten Grades gemein hat. Dass es eine geben muss, soll der Komplex nicht in einen Doppelpunkt resp. Punktepaar ausarten, folgt nach früherem (pag. 3).

Um diesen Satz zu beweisen, schicken wir folgenden voraus:

Wenn irgend ein Komplex ein Punktepaar enthält, so kann es keine Kurven zweiten Grades enthalten, welche nicht durch dasselbe hindurchgehen.

Denn ist S, A das Punktepaar, α die dasselbe ausschneidende Ebene, und nehmen wir an, es gäbe eine Ebene β, welche die Kurve zweiten Grades $\mathfrak{B}$ ausschneidet, so dass diese keinen Punkt mit S, A gemein hat, dann muss die Schnittlinie der beiden Ebenen den Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ notwendig einmal schneiden. Denn diese Schnittlinie liegt auf β und geht durch den Punkt S; jede durch S gehende Linie dieser Ebene muss aber den Kegelschnitt in noch einem Punkte schneiden, ausser der Tangente in S, d. h. der Schnittlinie von β und σ. Wir müssen desshalb vorerst den Fall ausschliessen, dass α und β sich gerade in dieser Tangente schneiden würden. Da also — dieses ausgenommen — die Schnittlinie von α und β den Kegelschnitt $\mathfrak{B}$ in noch einem Punkte schneiden muss, so hat die Ebene α ausser dem Punktepaar wenigstens noch diesen Schnittpunkt mit dem Komplexe gemeinsam, was der Voraussetzung widerspricht.

Nehmen wir aber an, die Schnittlinie von α und β falle mit der Tangente an $\mathfrak{B}$ in S gerade zusammen. Wir legen dann durch SA eine beliebige Ebene, welche den Kegelschnitt in einem Punkte schneidet. Diese Ebene enthält drei Punkte des Komplexes (S, A und den Schnittpunkt mit $\mathfrak{B}$) und muss desshalb ebenfalls einen Kegelschnitt ausschneiden, da nach obigem Linienpaare nicht möglich sind. Jetzt können wir beliebig viele nicht durch A gehende Ebenen durch S legen derart, dass dieselben diese beiden Kegelschnitte schneiden. Jede enthält sicher drei Punkte des Komplexes (S und die zwei Schnittpunkte mit den zwei Kurven zweiten Grades), muss somit wieder einen Kegelschnitt mit dem Komplexe gemein haben. Es ist nun immer möglich, eine dieser letzten Ebenen so zu wählen, dass ihre Schnittlinie mit σ nicht mit derjenigen von α und σ zusammenfällt, d. h. dass der vorhin ausgenommene Fall nicht eintritt. Wir können desshalb mit Hilfe dieses letzten Kegelschnittes und des Punktepaares S, A wie vorhin beweisen, dass die Ebene α noch einen andern Punkt des Komplexes — ausser A und S — enthalten muss, was unmöglich ist.

Wenn somit ein Komplex Punktepaare und Kegelschnitte enthält, so können die letzteren nur durch die Punktepaare hindurchgehen.

Enthält somit ein Komplex eine Reihe von Punktepaaren, so müssen sie so liegen, dass alle auf einem und demselben Kegelschnitte liegen, da ja nach obiger Ableitung mehrere Kegelschnitte neben Punktepaaren nicht vorkommen können. Der Komplex stellt somit einen Kegelschnitt im Raum dar, welcher von σ berührt wird. Ist aber nur ein einziges Punktepaar bekannt, z. B, S, A, so können scheinbar mehrere durch die Linie SA gelegte Ebenen, Kegelschnitte aus dem Komplexe ausschneiden. Nehmen wir jedoch an, es seien γ und β solche Ebenen, welche die durch A gehenden Kurven $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{B}$ ausschneiden, so legen wir eine Ebene S so, dass sie nicht durch A geht, jeden Kegelschnitt aber in je einem Punkte (ausser S) schneidet. S müsste dann ebenfalls einen Kegelschnitt mit dem Komplex gemein haben, — denn es liegen auf ihr sicher drei Punkte desselben —, und diese Kurve ginge nicht durch A. Dieses ist jedoch, wie eben gezeigt wurde, nicht möglich. Es giebt somit blos eine Ebene, welche eine Kurve ausschneidet. Dann aber sind neben dem Punktepaare S, A noch unendlich viele andere vorhanden. Der Fall, dass ein Komplex neben Kurven zweiten Grades blos ein Punktepaar hat, existiert also nicht.

Fassen wir jetzt die bisherigen Untersuchungen zusammen, so sehen wir: Die Komplexe der dritten Art (nach obiger Einteilung derselben) stellen blos folgende Gebilde dar: Einen Punkt, einen Doppelpunkt, eine beliebige Anzahl selbst unendlich vieler durch S gehender gerader Linien, von welchen jedoch höchstens zwei auf einer Ebene liegen und endlich eine nicht zerfallende Kurve zweiten Grades, welche von σ in S berührt wird. Andere Gebilde giebt es nicht.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung der Komplexe der zweiten Art. Der oben bewiesene Satz: dass in jedem Komplexe entweder nur Gerade oder nur Kurven zweiten Grades ausgeschnitten werden, lässt die einzige Möglichkeit offen, dass jede durch S gelegte Ebene höchstens zwei Gerade ausschneide. Der Komplex würde dann aus lauter Geraden bestehen, und zwar, wie sich leicht zeigen lässt, aus unendlich vielen Geraden. Denn gäbe es eine endliche Anzahl solcher Linien, so könnte man unter allen Umständen einen durch S (als Spitze) gehenden Kegel zweiten Grades konstruieren, so dass dieser alle diese Graden in sich schlösse. Es sind aber bei jedem Kegel dieser Art unendlich viele Ebenen möglich, welche durch die Spitze gehen und ausserhalb desselben liegen.

Der Komplex muss also aus unendlich vielen Geraden bestehen, die so liegen, dass höchstens zwei auf einer Ebene durch S liegen, jede dieser Ebenen (ausser σ) aber wenigstens eine enthält.

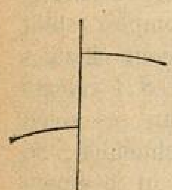
Ob ein solches Gebilde möglich ist, bleibt dahingestellt.

Wir kommen jetzt zur Untersuchung der Komplexe der ersten Art, welche so beschaffen sind, dass jede durch S gelegte Ebene (ausser σ) einen wirklichen Kegelschnitt und sonst keine weiteren Punkte ausschneidet. Die Existenz eines solchen Gebildes setzen wir vorerst voraus.

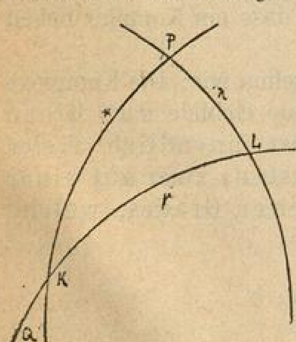
Wir erhalten leicht den Satz:

Ein Komplex der ersten Art muss, wenn er existiert, eine zusammenhängende, überall stetige Fläche darstellen.

Denn sei P ein beliebiger Punkt des Komplexes, so muss jede Ebene des Ebenenbüschels SP eine Kurve zweiten Grades ausschneiden. In dem Punkte P des Komplexes sind desshalb unendlich viele Punkte in jeder Richtung benachbart. Zugleich müssen die aufeinander folgenden Kurven des Büschels stetig in einander übergehen. Denn würden dieses zwei aufeinander folgende Kurven nicht thun an irgend einem Punkte, so würde eine dritte Ebene durch diesen Punkt so gelegt, dass sie beide Kurven schneidet, nicht einen Kegelschnitt ausschneiden können, da die ausgeschnittene Kurve an diesem Orte eine Unstetigkeit zeigen müsste.



Mittelst des obigen Satzes ergiebt sich nun von selbst der Satz, dass jeder Komplex in jedem Punkte eine Tangentenebene haben muss, dass also der Punkt S in Beziehung auf die Ebene σ kein ausgezeichneter Punkt des Komplexes ist. Denn es sei P ein beliebiger Punkt und $\varkappa$ und λ zwei Kurven zweiten Grades des Komplexes, welche durch P und S hindurchgehen. Es sei ferner μ eine dritte durch S gehende Kurve zweiten Grades desselben, welche $\varkappa$ in K und λ in L schneidet. Durch P, K, L lässt sich eine Ebene legen, welche die Sehnen PL, PK, LK der drei Kurven enthält. Ist nun Q ein beliebiger von S, L, K verschiedener Punkt von μ und denkt man sich die Ebene des Kegelschnittes μ um SQ herum gegen P hin sich drehen, so gehen die Sehnen in die Tangenten der drei Kegelschnitte in P über, und zwar LK in diejenige des Kegelschnittes SQP. Sie bleiben aber bei diesem Übergange immer in der sich bewegenden Ebene PLK. Diese kommt also, wenn der Kegelschnitt μ durch P geht, in eine Grenzlage in P, in welcher sie die Tangenten von $\varkappa, \lambda$ und SQP enthält. Hätte sich die Kurve μ von der



andern Seite P genähert, so müsste SQP in dieselbe Grenzlage übergegangen sein, da dieselbe durch die Tangenten an $\varkappa$ und λ in P bestimmt ist. Aus gleichem Grunde folgt auch, dass die Wahl des Punktes Q auf diese Grenzlage keinen Einfluss hat. Da nun aber die Tangente des Kegelschnittes SQP immer in derselben liegt, und wir den Punkt Q beliebig auf dem Komplexe wählen dürfen, so folgt, dass die Tangenten aller Kegelschnitte, welche durch das Ebenenbüschel SP aus dem Komplexe ausgeschnitten werden, auf dieser Grenzebene liegen, dass diese also die Tangentenebene π im Punkte P des Komplexes darstellt. Zugleich sehen wir, dass es nur eine einzige derartige Ebene in P giebt.

Anmerkung: Da wir von den Kurven $\varkappa$, λ, μ nur die Eigenschaft der Stetigkeit im P gebrauchten, so kann der Beweis ebenso für jede in P stetige Fläche gemacht werden, die so beschaffen ist, dass alle von irgend einem Ebenenbüschel SP ausgeschnittenen Kurven in P stetig sind.

Jede in P stetige Fläche, deren Schnittkurven eines Ebenenbüschels SP in P stetig sind, hat also in P eine Tangentenebene.

Wir sehen somit:

In jedem Punkte eines Komplexes der ersten Art giebt es eine Tangentenebene, welche mit dem Komplexe nur einen Punkt gemein hat.

Nun ist es nicht schwer folgenden Satz zu beweisen:

Stimmen zwei Komplexe ausser in S und σ überein in zwei sich zweimal schneidenden Kurven und in einem nicht in deren Ebenen liegenden Punkte, so sind sie identisch. Es seien die Kurven $\varkappa$, λ und der Punkt Q die gemeinsamen Elemente. Jede Ebene, welche $\varkappa$ resp. λ ausser in S in noch einem Punkte K resp. L schneidet, schneidet aus jedem Komplex eine Kurve zweiten Grades aus, welche durch S, Q, K, L hindurch geht und ihre Schnittlinie mit σ als Tangente hat. Beide dadurch ausgeschnittene Kurven sind somit identisch, weil sie fünf Elemente gemeinsam haben. Ebenso sind die beiden durch die Ebene QPS ausgeschnittenen Kegelschnitte gleich, da sie nach letztem Satz in P dieselbe Tangentenebene π haben. Auch müssen beide Komplexe in Q dieselbe Tangentenebene γ haben, da sie in beliebig vielen, durch SQ gehenden Kegelschnitten übereinstimmen. Und daraus folgt dann, dass sie auch in denjenigen Kurven übereinstimmen, welche durch die beiden von Q und den Tangenten von $\varkappa$ und λ bestimmten Ebenen ausgeschnitten werden. Denn von diesen vier Kegelschnitten stimmen je zwei überein in S, Q, den Tangenten in S und Q und in dem Schnittpunkt mit derjenigen Kurve $\varkappa$ resp. λ, durch deren Tangente die ausschneidende Ebene nicht geht. Beide Komplexe haben somit alle Kurven des Ebenenbüschels SQ gemeinsam und andere Punkte giebt es, wie leicht zu sehen, in keinem Komplexe. Dass obiger Satz ebenfalls gilt, wenn $\varkappa$ und λ sich berühren oder keinen Punkt gemein haben, ist leicht zu sehen. Es gilt desshalb allgemein:

Stimmen zwei Komplexe ausser in σ und S in zwei Kurven und einem nicht in deren Ebene liegenden Punkte Q überein, so sind sie identisch.

Aus dem bewiesenen Satze folgt nun gleich der weitere:

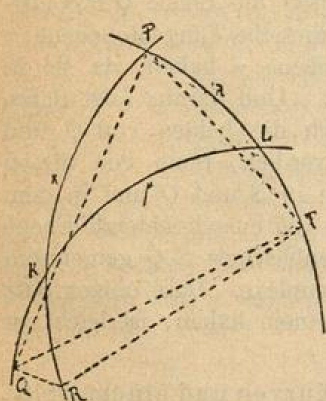
Ein Komplex muss durch zwei in S sich schneidende Kurven, $\varkappa$ und λ, welche σ berühren, und einen nicht in deren Ebenen liegenden Punkt Q eindeutig bestimmt sein, wenn es überhaupt einen giebt.

Und wie wir zu konstruieren haben, zeigt ebenfalls der letzte Beweis. Wir müssen nämlich zuerst alle die Ebenen durch SQ legen, welche $\varkappa$ und λ in je einem Punkte, K und L ausser S schneiden. Auf diesen Ebenen sind die Kegelschnitte durch S, Q, L, K und σ eindeutig bestimmt. Alle diese Kegelschnitte müssen dann in Q — wie später bewiesen wird —

dieselbe Ebene berühren (pag. 7), und diese Ebene γ ist leicht als Tangentenebene an zwei der konstruierten Kegelschnitte zu finden. Auf der Ebene $S\,Q\,P$ kennen wir vom Kegelschnitte drei Punkte und die Tangenten in S und Q, da wir γ konstruieren können. Dasselbe kennen wir in denjenigen beiden Ebenen, welche durch Q und je eine der beiden Tangenten von $\varkappa$ und λ gehen und nur den andern Kegelschnitt schneiden. Damit haben wir dann offenbar jeden Punkt des Komplexes konstruiert, und es bleibt uns nur zu beweisen erstens:

Dass alle so konstruierten Kurven $S\,Q$ in Q ein und dieselbe Tangentenebene haben, und zweitens: dass das konstruierte Gebilde einen Komplex darstellt, d. h. dass nicht nur die Ebenen durch $S\,Q$, sondern jede Ebene durch S einen Kegelschnitt ausschneidet.

Um die Beweise zu führen, untersuchen wir das Gebilde, welches durch die auf obige Weise konstruierten Kegelschnitte $S\,Q$ bestimmt ist, genauer. Wir nennen dasselbe einen Kegelschnittbüschel und bezeichnen denselben mit $S\,Q$, wobei der vorangestellte Buchstabe S bedeutet, dass in S die Ebene σ gegeben ist und somit durch S die Kurven $\varkappa$ und λ gehen. Durch den Punkt P, dem zweiten Schnittpunkte von $\varkappa$ und λ ausser S, und durch Q legen wir eine beliebige Ebene, welche $\varkappa$ im Punkte R und λ in T schneiden soll. Verbindet man S mit allen Punkten von $\varkappa$ oder λ, so erhält man zwei Strahlenbüschel, und verbindet man ebenso alle Kurvenpunkte von $\varkappa$ und λ durch Ebenen mit den in der Ebene $P\,Q\,R\,T$ liegenden Linien $Q\,R$ resp. $Q\,T$, so erhält man zwei Ebenenbüschel, von welchen $Q\,R$ projektivisch ist zu $S_{(\varkappa)}$ und $Q\,T$ projektivisch zu $S_{(\lambda)}$. Dadurch sind aber nach einem bekannten Satze die Strahlenbündel Q und S reciprok aufeinander bezogen. (Vergl. v. Staudt: Geom. d. Lage No. 129, I.)



Das Ebenenbüschel $S\,Q$ bezieht die beiden Strahlenbüschel S_k und S_λ perspektivisch so aufeinander, dass der Strahl $S\,P$ sich selbst entspricht. Dadurch sind aber auch die Ebenenbüschel $Q\,R$ und $Q\,T$ perspektivisch zugeordnet, weil die gemeinschaftliche Ebene $P\,Q\,R\,T$ sich selbst entspricht. Je zwei entsprechende Ebenen schneiden sich desshalb in je einer Linie eines Strahlenbüschels mit dem Centrum Q, dessen Ebene γ sei.

In dem Bündel S entspricht somit der Linie $S\,Q$ die Ebene γ in Q.

Nehmen wir jetzt eine Ebene des Büschels $S\,Q$, welche $\varkappa$ in K und λ in L schneidet; es sei dies die Ebene μ. Diese Ebene schneidet die Strahlen $S\,K$ und $S\,L$ in $S_\varkappa$ resp. S_λ aus, welchen in Q die Ebenen $Q\,R\,K$ resp. $Q\,T\,L$ entsprechen. Also entspricht der Ebene μ in S die Schnittlinie der Ebenen $Q\,R\,K$ und $Q\,T\,L$ in Q, die Linie m, welche in der Ebene γ nach obigem liegen muss und jedenfalls durch die Ebene μ nicht aus γ ausgeschnitten wird, weil K und L selbst auf μ liegen. Jedem Strahle durch S in der Ebene μ entspricht also im Bündel Q eine durch m gehende Ebene, und zwar dem Strahle $S\,K$ die Ebene $Q\,R\,K$ d. h. $m\,K$ und dem Strahle $S\,L$ ebenso die Ebene $m\,L$. Da nun das Ebenen- und Strahlenbüschel projektivisch aufeinander bezogen sind, so schneiden sie einen Kegelschnitt aus, welcher durch S, Q, K und L hindurchgeht und in Q von γ berührt wird, da dem Strahle $S\,Q$ in Q die Ebene γ entspricht.

Wir beweisen nun, dass diese Kurve ebenfalls von σ in S berührt wird, indem wir untersuchen, welche Ebene in Q demjenigen Strahle entspricht, welcher von σ und μ in S ausgeschnitten wird.

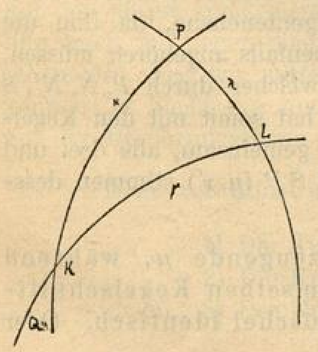
Die Ebene σ in S ist bestimmt durch die beiden Tangenten von $\varkappa$ und λ im Punkte S. Sie seien bezeichnet mit k und l. Der Linie k entspricht nun in Q die Ebene $Q\,k$ und ebenso entspricht l die Ebene $Q\,l$. Es entspricht somit der Ebene σ im Bündel S die Linie $Q\,S$ in P. Der Schnittlinie von σ und μ in S entspricht somit in Q die durch m und $Q\,S$ gelegte Ebene.

Daraus folgt, dass obige Kurve auf der Ebene μ von σ in S berührt wird und daraus, dass sie nichts anderes ist, als die auf der Ebene μ bestimmte Kurve des Kegelschnittbüschels. Diese wird also in Q von der Ebene γ ebenfalls berührt. Das gleiche folgt ebenso für alle andern Kurven des Büschels, welche $\varkappa$ und λ (ausser S) in zwei Punkten schneiden. Und wir haben also den wichtigen Satz:

Das Kegelschnittbüschel $S\,Q$ hat nicht nur in S, sondern auch in Q eine Tangentenebene.

Obigen Satz haben wir mittelst Anwendung einer Eigenschaft der Strahlenbündel bewiesen. Es wäre nun interessant, ohne Anwendung der Grundgebilde zweiter Stufe den Beweis zu führen, da wir dann, wie sich zeigen wird, die Theorie der Flächen zweiter Ordnung blos durch Kegelschnittseigenschaften abgeleitet hätten. Ich habe den Beweis folgendermassen zu führen versucht.

Es ist bekannt, wenn man in einer Gleichung für eine Kurve zweiten Grades die Coefficienten variiert, dass dann auch das Wertsystem einer Lösung sich unendlich wenig verändert. Das heisst, wenn man die Elemente, durch welche ein Kegelschnitt bestimmt ist, unendlich wenig verändert, so geht derselbe stetig in einen andern über. Lassen wir nun den Kegelschnitt μ über $\varkappa$ und λ hingleiten, so dass er immer durch Q und S geht, so verändern sich K und L wie oben verlangt wird; μ wird sich desshalb stetig in seiner Ebene verändern und bei der Bewegung dieser Ebene um $S\,Q$ eine Fläche beschreiben. Dieser stetige Übergang erleidet jedoch eine Unterbrechung, wenn K in S und L in S übergeht, da wir dann von μ, wie wir sahen, nur noch vier Elemente kennen und die Kurve somit nicht mehr bestimmt ist. In beiden Fällen bestimmen wir jedoch den Kegelschnitt, wie es die Konstruktion eines Kegelschnittbüschels verlangt, durch die theoretisch mögliche Bedingung, dass derselbe mit dem unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden, welche noch vollständig bestimmt sind, dieselbe Tangentenebene in Q haben soll.



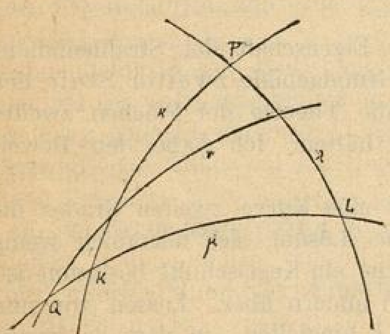
Dadurch ist bewirkt, dass sicher in der Umgebung des Punktes Q alle Kegelschnitte stetig in einander übergehen, somit dort das Stück einer Fläche bilden, an welche sich (nach pag. 7, Anmerkung) eine Tangentenebene legen lassen muss. Die Tangenten aller Kurven des Büschels liegen also in dieser Ebene und man sieht jetzt nachträglich, dass man zur Konstruktion jener beiden besonders besprochenen Kurven nicht die beiden benachbarten, sondern beliebige des Büschels gebrauchen kann.

Durch den Beweis dieses Satzes sehen wir, dass die erste jener beiden Forderungen (pag. 7), welche die Konstruktion eines Komplexes bedingen, erfüllt ist. Weitere Eigenschaften der Kegelschnittbüschel ergeben ebenso leicht die zweite. Vorab wichtig ist folgender Satz:

In einem Kegelschnittbüschel $S\,Q$, dessen erzeugende Kurven $\varkappa$ und λ ausser S im Punkte P sich schneiden, werden auch durch die Ebenen des Ebenenbüschels $S\,P$ Kurven zweiten Grades ausgeschnitten.

Es seien μ und ν zwei Kurven des gegebenen Kegelschnittbüschels. Durch dieselben ist ein zweites Kegelschnittbüschel SP bestimmt, welches nach dem letzten Satze in P die durch die Tangenten von $\varkappa$ und λ bestimmte Ebene π als Tangentenebene haben muss, da $\varkappa$ und λ diesem Büschel selbst angehören. Hätte man nun zur Konstruktion dieses Büschels statt ν zum Beispiel neben μ irgend eine andere Kurve ν' des Büschels SQ genommen, so hätte man mittelst μ und ν' ein zweites Büschel SP konstruieren können, welches in P, da ebenfalls diesem $\varkappa$ und λ angehören, dieselbe Tangentenebene π haben muss. Je zwei Kurven dieser Büschel SP, welche durch dieselbe Ebene SP ausgeschnitten werden, stimmen desshalb überein in S, P, im Schnittpunkt der herausschneidenden Ebene mit μ und in den Tangenten in P und S. Sie sind desshalb identisch.

Dieses gilt nur nicht von den beiden Kurven, welche von derjenigen Ebene χ, die durch P, S und die Tangente an μ in S hindurchgeht, ausgeschnitten werden. Denn diese Kurven stimmen blos überein in S, σ, P und π, während die Kurve des ersten Büschels ν in N und die Kurve des andern Büschels ν' in N' schneidet. Um nun zu beweisen, dass auch auf dieser Ebene die Kurven P, π, N, S, σ und $P, \pi\, N', S, \sigma$ identisch sind, konstruieren wir ein drittes Kegelschnittbüschel SP mittelst den Kurven ν und ν'. Um diese drei Büschel SP kurz zu bezeichnen, setzen wir fortan hinter die bisherige Bezeichnung die beiden erzeugenden Kurven in eine Klammer, so dass wir folgende drei Büschel SP haben:



1) $SP(\mu, \nu)$; 2) $SP(\mu, \nu')$; 3) $SP(\nu, \nu')$.

Von diesen dreien hat das Büschel $SP(\nu, \nu')$ in P ebenfalls die Ebene π als Tangentenebene, da ihm die Kurven $\varkappa$ und λ, deren gemeinschaftliche Berührungsebene π ist, ebenfalls angehören müssen. Die Ebene χ schneidet desshalb aus ihm einen Kegelschnitt aus, welcher durch P, N, N', S geht und die Ebene π und σ in P resp. S berührt. Diese Kurve hat somit mit den Kegelschnitten P, π, N, S, σ und P, π, N', S, σ jedesmal die fünf Elemente gemeinsam, alle drei und also auch die beiden letzten sind desshalb identisch. $SP(\mu, \nu)$ und $SP\ (\mu, \nu')$ stimmen desshalb in allen Kurven überein, woraus zugleich der Satz folgt:

Haben zwei Kegelschnittbüschel SP dieselbe erzeugende μ, während jeweils die andere Erzeugende jedes Büschels und μ demselben Kegelschnittbüschel SQ angehören, so sind die beiden Kegelschnittbüschel identisch. Oder etwas allgemeiner ausgesprochen:

Sind die Erzeugenden mehrerer Kegelschnittbüschel SP Kurven ein und desselben Büschels SQ, so sind die Kegelschnittbüschel SP identisch.

Nun ergibt sich von selbst der zu beweisende Satz (pag. 9). Denn weil $SP(\mu, \nu)$ und $SP(\mu\, \nu')$ identisch sind, so gehört dem Büschel $SP(\mu, \nu)$ auch die Kurve ν' an und nach dem zuletzt aufgestellten Satze jeder andere Kegelschnitt des Büschels $SQ(\varkappa, \lambda)$. Durch jeden Punkt A des Büschels $SP(\mu, \nu)$ geht diejenige Kurve des Büschels SQ, welche durch die Ebene SQA aus letzterem herausgeschnitten wird, da ja diese Kurve auch als eine Erzeugende von SP betrachtet werden kann. Beide Büschel haben also alle Punkte gemeinsam, und es müssen aus $SQ(\varkappa, \lambda)$ durch die Ebenenbüschels SP das Kegelschnittbüschel SP ausgeschnitten werden. Damit ist der obige Satz (pag. 9) bewiesen und wir erhalten zugleich den weiteren:

Sind von zwei Kegelschnittbüscheln SP und SQ zwei der Kurven des einen die Erzeugenden des andern, so bestimmen beide dieselbe Fläche.

Nun folgt leicht, dass das Kurvenbüschel $SQ(\varkappa, \lambda)$ überall, nicht nur in der Umgebung von Q, eine stetig zusammenhängende Fläche darstellt.

Denn nehmen wir an, es würden zwei aufeinander folgende Kurven μ und ν nicht stetig in einander übergehen, dann könnte jede Ebene des Büschels SP, welche die beiden Kurven schneidet, keinen Kegelschnitt ausschneiden, da die ausgeschnittene Kurve bei denjenigen ihrer Punkte, welche zugleich μ und ν angehören, eine Unstetigkeit zeigen müsste, was bei einem Kegelschnitt unmöglich ist. Somit erhellt:

Durch einen Kegelschnittbüschel ist eine überall stetig zusammenhängende Fläche dargestellt.

Nun ist es möglich, für diese Fläche eine Konstruktion aus andern Elementen, als den bisher gegebenen, zu finden. Wir nehmen an, es seien ausser S und σ noch der Punkt P und eine Ebene durch ihn π gegeben, und ausserdem hätten wir noch einen Kegelschnitt μ, welcher, ohne auf σ zu liegen, σ in S berührt, mit π aber keinen Punkt gemein hat. Auf jeder Ebene SP, welche μ in S nicht berührt, wird dann mittelst S, σ, P, π und dem Schnittpunkte M mit μ ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Von diesen Kurven nehmen wir zwei beliebige $\varkappa$ und λ heraus und legen durch einen beliebigen Punkt Q von μ eine Ebene SQ, welche $\varkappa$ in K, λ in L schneidet. Durch S, σ, Q, K, L ist dann auf dieser Ebene ein Kegelschnitt ν bestimmt, und wir erkennen leicht, dass mittelst μ und ν ein Kegelschnittbüschel $SP(\mu, \nu)$ bestimmt ist, welches von π in P berührt wird, und dessen Kegelschnitte mit den zuerst konstruierten (mittelst S, σ, P, π und Kurve μ) identisch sind. Dadurch ist nun auch auf jener Ebene SP, welche μ in S berührt, ein Kegelschnitt bestimmt. Wir sehen also, dass wir mittelst S, σ, π, P und der Kurve μ ein Kegelschnittbüschel konstruieren können: es bleibt nur noch zu beweisen, dass es blos eines gibt, d. h. dass die Kurve, welche auf der Berührungsebene SP an μ liegt, von der Konstruktion unabhängig ist.

Denn zur Konstruktion war beliebig gewählt:

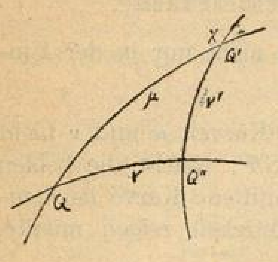
1) Die Kurve $\varkappa$ und λ.
2) Die Kurve ν.
3) Der Punkt Q auf μ.

Vorerst ist ersichtlich, dass, wie man auch diese Stücke wählen mag, die Kurven derjenigen Ebenen, welche μ schneiden, dieselben bleiben, da sie durch P, π, S, σ und dem Schnittpunkt ihrer Ebene mit μ eindeutig bestimmt sind. Um dasselbe von der Berührungsebene an μ zu beweisen, denke ich zuerst statt $\varkappa$ und λ zwei andere auf ebendieselbe Weise konstruierten Kurven $\varkappa'$ und λ' genommen und statt ν die Kurve ν' ebenfalls durch Q gehend. Nach Satz pag. 10 ist dann:

$$SP(\mu, \nu') \text{ identisch mit } SQ(\varkappa', \lambda').$$
$$SP(\mu, \nu) \text{ identisch mit } SQ(\varkappa, \lambda).$$

Nun gehören aber $\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda'$ demselben Kegelschnittbüschel $SP(\mu, \nu)$ an, also ist $SQ(\varkappa, \lambda)$ identisch mit $SQ(\varkappa', \lambda')$. Somit muss auch $SP(\mu, \nu')$ identisch sein mit $SP(\mu, \nu)$, d. h. es ist gleichgiltig, wie ich diese Stücke wähle, wenn nur der Punkt Q derselbe bleibt.

Nun denke ich den Punkt Q auf der Kurve μ verschoben nach Q'. Auf der durch Q gehenden Kurve zweiten Grades ν nehme ich einen Punkt Q'' so an, dass wenn ich durch $Q'\,Q''\,S$ eine Ebene lege, dieselbe den Kegelschnitt $\varkappa$ und λ nicht berührt, was immer möglich ist. Auf dieser Ebene konstruiere ich mittelst S, σ, Q'' und den beiden Schnittpunkten mit $\varkappa$ und λ eine Kurve ν' und beweise zunächst, dass sie μ in Q' schneiden muss.



Zum Nachweise lege ich durch $S\,P\,Q'$ eine Ebene, welche die Kurve μ in Q', ν in R und ν' in X schneidet. Durch S, σ, P, π und je einen der Punkte Q', R, X sind in dieser Ebene die Kurven K_μ resp. K_ν resp. $K_{\nu'}$ bestimmt. Und es muss nun offenbar identisch sein:

$$K_\mu \text{ mit } K_\nu \text{ [als Kurve im Büschel } S\,P(\mu, \nu)]$$

$$K_\nu \text{ mit } K_{\nu'} \text{ [als Kurve im Büschel } S\,P(\nu, \nu')]$$

also auch:

$$K_\mu \text{ mit } K_{\nu'}$$

Auf K_μ liegt nun der Punkt Q', er muss also auch auf $K_{\nu'}$ liegen und kann dort kein anderer sein, als der Punkt X, weil er auf der Ebene $S\,P$ liegen muss. Das heisst aber ν' muss μ im Punkte Q' schneiden.

Nun ist es leicht, den Beweis zu vollenden. Diejenige Ebene $S\,P$, welche μ in S berührt, schneidet ν in N und ν' in N'. Auf ihr sind wie oben durch S, σ, P, π und N resp. N' zwei Kegelschnitte bestimmt, C_ν und $C_{\nu'}$. Derjenige Kegelschnitt, welcher in $S\,P(\mu, \nu)$ die Kurve μ berührt sei C und derjenige, welcher sie in $S\,P(\mu, \nu')$ berührt sei C_1. Es muss dann sein:

$$C = C_\nu \text{ [als Kurve in } S\,P(\mu, \nu)]$$

$$C_\nu = C_{\nu'} \text{ [als Kurve in } S\,P(\nu, \nu')]$$

$$C_{\nu'} = C_1 \text{ [als Kurve in } S\,P(\mu, \nu')]$$

das heisst aber:

$$C = C_1.$$

Wo immer man also bei Ausführung obiger Konstruktion den Punkt Q auf μ annimmt, erhält man dieselbe Kurve $S\,P$, welche μ berührt. Und da die andern Kegelschnitte $S\,P$, welche μ schneiden, von selbst gleich sind, so folgt der Satz:

Durch S, σ, einem nicht auf σ gelegenen Punkte P und einer Ebene π durch denselben, ausserdem durch einen Kegelschnitt μ, welcher σ in S berührt, mit π aber keinen Punkt gemein hat, ist ein Kegelschnittbüschel $S\,P$ eindeutig bestimmt.

Wir bezeichnen diese Büschel mit $S\,P\,\pi\,(\mu)$, wo π die Tangentenebene des zunächst stehenden Punktes P bezeichnet, während der eingeklammerte griechische Buchstaben, die durch S gehende Kurve zweiten Grades bezeichnet.

Wir haben somit den Satz:

Nimmt man in einem Büschel $S\,P\,\pi\,(\mu)$ auf der Kurve μ einen beliebigen Punkt Q, und ausserdem zwei nicht durch diesen Punkt gehende Kegelschnitte $\varkappa$ und λ des Büschels, so erhält man ein neues Büschel $S\,Q\,(\varkappa, \lambda)$, welches dieselbe Fläche mit dem ersten bildet.

Nun könnten wir leicht neue Konstruktionsmethoden von Kegelschnittbüschel auffinden und beweisen; wir wenden uns jedoch zur Untersuchung der von einem solchen dargestellten Fläche.

Von einer solchen wissen wir aus dem bisherigen, dass sie von zwei Schaaren von Kegelschnitten bedeckt ist, von denjenigen der Ebenenbüschel SP und SQ. In jedem Punkte der Fläche schneiden sich desshalb zwei Kegelschnitte, je einer von jeder Schaar mit einem der andern Nur die Punkte S, Q und P scheinen ausgezeichnete Punkte zu sein, indem sich dort nicht zwei, sondern unendlich viele Kegelschnitte schneiden.

Wir erhalten jedoch leicht folgenden Satz:

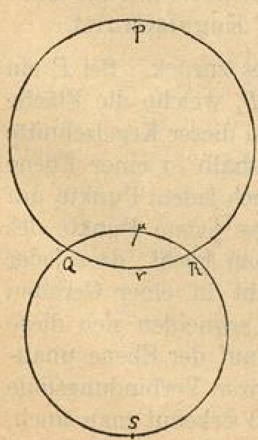
Haben zwei Kegelschnittbüschel SA und SB dieselben Erzeugenden und liegt der Punkt B des einen auf der Fläche des andern, so haben sie alle Punkte gemeinsam.

Es seien die Erzeugenden wieder $\varkappa$ und λ, die gemeinsamen Punkte und Tangentenebenen derselben wieder S und σ, P und π. Wir erkennen sogleich, dass beide Büschel die auf der Ebene SB liegenden Kurven gemeinsam haben müssen, da diese Ebene wenigstens eine der beiden Kurven $\varkappa$ und λ schneiden muss. Diese gemeinsame Kurve heisse μ. Mittelst S, σ, P, π, μ können wir nun das Kegelschnittbüschel $SP\pi(\mu)$ konstruieren, welches nach dem vorhergehenden Satze sowohl mit $SA(\varkappa, \lambda)$, als mit $SB(\varkappa, \lambda)$ dieselbe Fläche bilden muss, womit der Satz bewiesen ist.

Ist somit A ein beliebiger Punkt des Büschels $SB(\varkappa, \lambda)$, so muss jede Ebene SA aus dem Büschel einen Kegelschnitt ausschneiden, da das Büschel $SA(\varkappa, \lambda)$, welches wir konstruieren können, alle Punkte mit $SB(\varkappa, \lambda)$ gemeinsam hat. Da nun A ein beliebiger Punkt von$SB(\varkappa, \lambda)$ ist, so folgt der Satz:

Jede durch S gehende Ebene schneidet aus einem Kegelschnittbüschel, einen Kegelschnitt aus.

Somit stellt also ein Kegelschnittbüschel einen oben definierten Komplex dar, hat also in jedem Punkte eine Tangentenebene. Und wir sehen, dass durch alle jene Stücke, durch welche ein Kegelschnittbüschel eindeutig bestimmt ist, ebenfalls ein Komplex eindeutig gegeben ist.



Wir wissen also, Komplexe der beschriebenen Art existieren in der That, und es ist nun nicht schwer, weitere Eigenschaften aufzufinden. Zunächst sehen wir, dass in $SQ(\varkappa, \lambda)$ resp. $SP\pi(\mu)$ der Punkt S vor P immer noch dadurch ausgezeichnet ist, dass $\varkappa, \lambda$ resp. μ durch ihn gehen müssen, und dass nur die Ebenen des Ebenenbündels S Kurven zweiten Grades ausschneiden. In Bezug auf den ersten Punkt werden wir zeigen, dass ein Komplex SP auch bestimmt ist durch S, σ, P, eine in S die Ebene σ berührende Kurve zweiten Grades μ und eine zweite Kurve ν durch P, welche μ in zwei Punkten schneidet, aber nicht in deren Ebene liegt. Denn bei dieser Bestimmung eines Kegelschnittbüschels, d. h. eines Komplexes, ist S vor P in keiner Weise ausgezeichnet, da in P dann auch eine Tangentenebene π vorhanden sein muss.

Es seien die Schnittpunkte von μ und ν die Punkte Q und R. Auf jeder Ebene PS, welche μ und ν nicht berührt und nicht durch Q und R geht, ist durch $S\sigma P$ und den Schnittpunkten mit μ und ν ein Kegelschnitt eindeutig bestimmt, ebenso auf den Ebenen PQS

und PRS, indem man die natürliche Bestimmung trifft, dass die Kegelschnitte in Q und R die gemeinschaftlichen Tangentenebenen von μ und ν berühren sollen. Das gleiche gilt für die ν berührende Ebene. Dort ist der Kegelschnitt durch S, σ, P, dem Schnittpunkt M mit μ und die Tangente an ν in P bestimmt. Sollten jedoch μ und ν dieselbe Berührungsebene haben, so dass M mit S zusammenfällt, so ist der Kegelschnitt bestimmt durch die gleich anzugebende Konstruktion auf der Berührungsebene an μ. Wir bestimmen nämlich auf dieser Ebene wie oben (pag. 9) den Kegelschnitt durch die vorerst blos theoretisch mögliche Bedingung, dass er mit dem nächstfolgenden und dem vorhergehenden in P dieselbe Ebene berühren soll.

Verfahren wir jetzt genau wie oben, so erhalten wir aus denselben Gründen jedenfalls in der Umgebung des Punktes P ein stetig zusammenhängendes Flächenstück, so dass wieder in P alle Kurven SP eine gemeinschaftliche Tangentenebene π haben. Und diese Ebene berührt ebenfalls die Kurve ν, da ihre Tangente in P zugleich Tangente an diejenige Kurve SP ist, welche auf der die Kurve ν berührenden Ebene liegt.

Anmerkung. Dieser Beweis kann auf analoge Weise wie oben (pag. 8) mit Anwendung von Grundgebilden zweiter Stufe durchgeführt werden.

Nun folgt leicht, dass alle diese Kurven zweiten Grades ein Kurvenbüschel SP bilden, denn da alle π in P berühren, so sind sie identisch mit denjenigen des Büschels $SP\pi(\mu)$.

Konstruieren wir jedoch das Büschel $PS\sigma(\nu)$, so sehen wir, dass die Kurven dieses Büschels ebenfalls mit den mittelst μ und ν konstruierten zusammenfallen. Die Büschel $SP\pi(\mu)$ und $PS\sigma(\nu)$ stellen somit dieselbe Fläche dar, und es muss desshalb sowohl jede Ebene durch S als auch durch P eine Kurve zweiten Grades ausschneiden. Somit haben wir den Satz:

Aus dem durch $SP\pi(\mu)$ bestimmten Komplex schneidet jede Ebene der Bündel S und P Kurven zweiten Grades aus. Oder:

Der Komplex $SP\pi(\mu)$ und $PS\sigma(\nu)$ sind identisch.

Nun wissen wir aber, dass in der Fläche $SP\pi(\mu)$ der Punkt P kein ausgezeichneter Punkt ist, sondern dass, wenn A ein beliebiger Punkt, α darin die Berührungsebene, ε eine in der Fläche liegende Kurve zweiten Grades durch S bedeutet, wir dieselbe auch durch das Büschel $SA\alpha(\varepsilon)$ darstellen können. Daraus folgt dann wieder, dass auch jede durch A gehende Ebene eine Kurve zweiten Grades ausschneidet. Und es resultiert so:

Schneidet eine beliebige Ebene die durch einen Kegelschnittbüschel dargestellte Fläche, so ist die Schnittkurve ein nicht zerfallender Kegelschnitt.

Die weitere Untersuchung dieser Flächen geht nun auf Bekanntes zurück. Sei P ein ausserhalb der Fläche gelegener Punkt, so schneidet jede Ebene durch P, welche die Fläche trifft und nicht berührt, einen Kegelschnitt aus. Konstruiert man in jedem dieser Kegelschnitte die Polare zu P, so müssen sich alle diese Polare schneiden und desshalb in einer Ebene liegen, weil sie nicht durch einen Punkt hindurchgehen. Ordnet man noch jedem Punkte auf der Fläche die durch ihn gehende Tangentenebene zu, so sieht man, dass jedem Punkte des Raumes eine Ebene, die Polarebene, zugeordnet ist. Ebenso erkennt man leicht, dass jeder Ebene ein Punkt, der Pol, zugeordnet ist. Denn nimmt man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte der Ebene und konstruiert zu jedem die Polarebene, so schneiden sich diese in einem Punkte, dem Pol. Dieser ist von der Lage jener drei Punkte auf der Ebene unabhängig, da er von jedem Punkte der Ebene durch die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit der Fläche harmonisch getrennt ist, wie man leicht sieht. Zugleich erkennt man auch, dass wenn π die Polarebene zu P und μ zu M ist und M liegt in π, dass dann auch P in μ

liegen muss. Man sieht also, die Punkte und Ebenen des Raumes sind durch den Komplex reciprok einander zugeordnet, so dass die Punkte des Komplexes auf den ihnen zugeordneten Ebenen liegen. Das heisst aber: Obige Komplexe sind Flächen zweiter Ordnung nach von Staudt'scher Definition, und zwar nur solche, welche keine geraden Linien enthalten, also Elipsoide, Paraboloide und parabolische Hyperboloide, während die sogenannten Regelflächen von obiger Definition nicht umfasst werden. Dagegen fallen unter sie, wie wir sahen, wieder Gebilde, welche nicht zu den Flächen zweiter Ordnung gehören.

Es erübrigt nun noch, auch für die Regelflächen eine ähnliche Definition aufzustellen, wie die gegebene. Diese finden wir ebenfalls bei von Staudt am gleichen Orte; sie lautet:

„Wenn eine Fläche F, welche mit der Ebene U die Gerade a, p, aber keinen ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkt gemein hat, auch von jeder andern Ebene, welche durch a oder p geht, in noch einer Geraden, von jeder Ebene H aber, welche die Geraden a, p im Punkte ap schneidet, in einer Kurve II. Ordnung geschnitten wird, die alle in der Ebene H befindlichen Punkte der Fläche F enthält, so ist diese Fläche eine Regelfläche."

Von dieser Definition ausgehend kann dann die Theorie auf ganz analoge Weise, wie die gegebene, durchgeführt werden.

Ueber die Flächen zweiten Grades.

§ 1. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit drei Variabeln ist

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0 \; (1).$$

Die Funktion auf der linken Seite wird gelegentlich abkürzend mit $f(x, y, z)$ bezeichnet werden.

Die Gleichung (1.) stellt eine Fläche dar, welche durch jede einer Coordinaten-Ebene parallele Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten wird. — Da jede Ebene als Coordinaten-Ebene angenommen werden kann, und da der Uebergang von einem Parallel-Coordinaten-Systeme zu irgend einem andern Parallel-Coordinaten-Systeme weder den Charakter der Gleichung als einer algebraischen noch ihren Grad ändert, so folgt daraus, dass die Fläche durch jede Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten wird. Diese kann selbstverständlich alle Spezial- nnd Grenzfälle darbieten, insbesondere auch imaginär werden. — Demzufolge wird eine Fläche zweiten Grades von jeder geraden Linie in zwei Punkten geschnitten; es kann die Besonderheit eintreten, dass, während die Linie in endlicher Entfernung liegt, einer der beiden Punkte in unendlicher Entfernung liegt; es kann die andere Besonderheit eintreten, dass die beiden Punkte in einen zusammenfallen oder dass sie imaginär werden.

§ 2. Durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in den Punkt $(p\ q\ r)$ ohne Aenderung der Axenrichtungen werden die sechs Glieder zweiter Dimension nicht geändert, die Coefficienten der drei Glieder erster Dimension werden

$$\begin{aligned} &2\,(a_{11}\, p + a_{12}\, q + a_{13}\, r + a_{14}) \\ &2\,(a_{21}\, p + a_{22}\, q + a_{23}\, r + a_{24}) \\ &2\,(a_{31}\, p + a_{32}\, q + a_{33}\, r + a_{34}) \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass $a_{ts} = a_{st}$ ist. — Wenn $p\ q\ r$ so bestimmt werden, dass jene drei Coefficienten gleichzeitig Null werden, so ist der Punkt $(p q r)$ der Mittelpunkt der Fläche, indem dann jede durch diesen Punkt gezogene Sehne der Fläche von ihm halbiert wird.

Die Fläche hat einen bestimmten Mittelpunkt in endlicher Entfernung, wenn der gemeinsame Nenner der durch diese drei Bedingungen bestimmten Werthe von $p\ q\ r$ von Null verschieden ist. — Dieser gemeinsame Nenner ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Wenn demnach diese Zahl von Null verschieden ist, so ist die Fläche eine Mittelpunktsfläche; sie ist es nicht, wenn die Zahl gleich Null ist.

§ 3. Welches ist der geometrische Ort der Mitte einer Sehne von gegebener Richtung in einer Fläche zweiten Grades?

Die Gleichungen der Sehne seien

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad (3)$$

die Gleichung der Fläche sei die (1) in § 1.

Man erhält die Durchnittspunkte der Linie (3) mit der Fläche (1), indem man diejenigen Werthe von $x\,y\,z$, welche diesen beiden Oertern gemeinsam sind, d. h. indem man die den Gleichungen (1) und (3) gemeinsamen Wurzeln bestimmt. Man erhält dadurch zwei Werthegruppen von $x\,y\,z$, den Endpunkten der Sehne entsprechend. — Man erhält die Coordinaten der Mitte der Sehne, indem man die halbe Summe je zweier gleichnamigen Coordinaten der Endpunkte der Sehne nimmt. Die Elimination gewinnt Symmetrie und dadurch Einfachheit, indem man eine vierte Variable λ einführt, welche so bestimmt ist, dass

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = \lambda \qquad (4).$$

Es ist dann λ der Entfernung des Punktes $x\,y\,z$ vom Punkte $x_1\,y_1\,z_1$ proportional. Die Elimination ergiebt dann zwei Werthe für λ, deren halbe Summe dem Abstande der Mitte der Sehne von $x_1\,y_1\,z_1$ proportional ist. Die Gleichungen der Linie (3) sind

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a\lambda \\ y &= y_1 + b\lambda \\ z &= z_1 + c\lambda \end{aligned}$$

Durch Substitution in die Gleichung (1) erhält man

$$\begin{aligned} &(a_{11}\,a^2 + a_{22}\,b^2 + a_{33}\,c^2 + 2a_{12}\,ab + 2a_{13}\,ac + 2a_{23}\,bc)\,\lambda^2 \\ &+ 2\left\{\begin{matrix} a_{11}\,ax_1 + a_{22}\,by_1 + a_{33}\,cz_1 + a_{12}\,(ay_1 + bx_1) + a_{13}\,(az_1 + cx_1) + a_{23}\,(bz_1 + cy_1) \\ + a_{14}\,a + a_{24}\,b + a_{34}\,c \end{matrix}\right\}\lambda \\ &+ f\,(x_1\,y_1\,z_1) = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Mitte der Sehne mit $x'\,y'\,z'$ und entsprechend die halbe Summe der beiden Werthe von λ mit λ', so hat man die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + a\lambda' \\ y' &= y_1 + b\lambda' \\ z' &= z_1 + c\lambda' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(a_{11}\,a^2 + a_{22}\,b^2 + a_{33}\,c^2 + 2a_{12}\,ab + 2a_{13}\,ac + 2a_{23}\,bc)\,\lambda' \\ &+ \left\{\begin{matrix} a_{11}\,ax_1 + a_{22}\,by_1 + a_{33}\,cz_1 + a_{12}\,(ay_1 + bx_1) + a_{13}\,(az_1 + cx_1) + a_{23}\,(bz_1 + cy_1) \\ + a_{14}\,a + a_{24}\,b + a_{34}\,c \end{matrix}\right\} = 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen $x_1\,y_1\,z_1$ (wodurch gleichzeitig λ' herausfällt) d. h. macht man die Beziehung zwischen den Variabeln und den Constanten unabhängig von denjenigen Grössen, welche nur einer individuellen Lage der Sehne angehören, so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes der Mitte der Sehne, deren Richtung $(a\,b\,c)$ ist. Nach Weglassung der Accente wird die Gleichung:

$$(a_{11}\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c)\,x + (a_{21}\,a + a_{22}\,b + a_{23}\,c)\,y + (a_{31}\,a + a_{32}\,b + a_{33}\,c)\,z$$
$$+ (a_{41}\,a + a_{42}\,b + a_{43}\,c) = 0. \qquad (5)$$

Der geometrische Ort der Mitte einer Sehne von gegebener Richtung ist also eine Ebene. — Wenn die Fläche eine Mittelpunktsfläche ist, so ist nothwendig der Mittelpunkt in der Ebene (5) enthalten. Die Ebene enthält also dann unendlich viele Durchmesser. — Sie enthält aber auch in jedem anderen Falle unendlich viele Durchmesser und heisst deshalb Durchmesserebene.

Bezeichnet man eine in der Ebene (5) enthaltene Richtung mit $(a_1\; b_1\; c_1)$, so ist diese Beziehung dargestellt durch die Gleichung

$$(a_{11}\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c)\,a_1 + (a_{21}\,a + a_{22}\,b + a_{23}\,c)\,b_1 + (a_{31}\,a + a_{32}\,b + a_{33})\,c_1 = 0.$$

Diese Gleichung erweis't sich als symmetrisch in Bezug auf $a\,b\,c$ einerseits und $a_1\; b_1\; c_1$ andrerseits, und lässt sich demzufolge schreiben

$$(a_{11}\,a_1 + a_{12}\,b_1 + a_{13}\,c_1)\,a + (a_{21}\,a_1 + a_{22}\,b_1 + a_{23}\,c_1)\,b + (a_{31}\,a_1 + a_{32}\,b_1 + a_{33}\,c_1)\,c = 0$$

d. h. die Richtung $(a\;b\;c)$ ist in dem geometrischen Orte der Mitte der Sehne von der Richtung $a_1\,b_1\,c_1$ enthalten. — Deshalb nennt man die Richtung $(a\,b\,c)$ und die Stellung der Ebene (5) conjugirt und hat den Satz:

Jeder Richtung ist in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades eine Stellung derart conjugirt, dass die allen Richtungen dieser Stellung conjugirten Stellungen jene eine Richtung gemeinsam haben; und umgekehrt.

§ 4. Unter welchen Bedingungen steht eine Richtung $(a\,b\,c)$ auf der conjugirten Stellung senkrecht?

Die Bedingung ist unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$\frac{a_{11}\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c}{a} = \frac{a_{21}\,a + a_{22}\,b + a_{23}\,c}{b} = \frac{a_{31}\,a + a_{32}\,b + a_{32}\,c}{c} \qquad (6)$$

Um diejenige Werthegruppe $a\;b\;c$ zu bestimmen, welche diesen beiden Bedingungen gleichzeitig genügt, führt man eine vierte Unbekannte λ ein, welche so bestimmt ist, dass

$$\frac{a_{11}\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c}{a} = \frac{a_{21}\,a + a_{22}\,b + a_{23}\,c}{b} = \frac{a_{31}\,a + a_{32}\,b + a_{33}\,c}{c} = \lambda. \quad (7)$$

Diese Gleichungen kann man in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11} - \lambda)\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c &= 0\\ a_{21}\,a + (a_{22} - \lambda)\,b + a_{23}\,c &= 0\\ a_{31}\,a + a_{32}\,b + (a_{33} - \lambda)\,c &= 0\end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Die Bedingung, dass diese drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein können, ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf λ vom dritten Grade, hat also jedenfalls eine reelle Wurzel. Es lässt sich zeigen, dass alle drei Wurzeln reell sind.

Die Gleichung (9) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - (\lambda - a_{11})\, a_{23}^2 - (\lambda - a_{22})\, a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})\, a_{12}^2 - 2a_{12}\, a_{23}\, a_{31} = 0$$

Dieselbe lässt sich folgendermassen ordnen:

$$(\lambda - a_{11}) \left\{(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2\right\} - (\lambda - a_{22})\, a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})\, a_{12}^2 - 2a_{12}\, a_{23}\, a_{31} = 0 \quad (10)$$

Die Zahl $(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2$

lässt sich stets in zwei reelle Faktoren

$$(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

zerlegen, wo die kleinere der beiden Zahlen β und γ (es sei β) kleiner als a_{22} und als a_{33}, die grössere $\gamma > a_{22}$ und $> a_{33}$ ist. Die linke Seite der Gleichung (10) nimmt dann für

$$\begin{array}{lll}
\lambda = -\infty & \text{den Werth} & -\infty \\
\lambda = \beta & \text{„} \quad \text{„} & +\left(\sqrt{a_{22} - \beta}\, .\, a_{13} - \sqrt{a_{33} - \beta}\, .\, a_{12}\right)^2 \\
\lambda = \gamma & \text{„} \quad \text{„} & -\left(\sqrt{\gamma - a_{22}}\, .\, a_{13} + \sqrt{\gamma - a_{33}}\, .\, a_{12}\right)^2 \\
\lambda = + & \text{„} \quad \text{„} & +\infty
\end{array}$$

an, mithin hat die Gleichung (9) eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und β, eine zwischen β und γ und eine zwischen γ und $+\infty$. — Es ergibt sich demnach, dass, mit Ausnahme besonderer Fälle, welche sogleich zu erörtern sind, λ drei verschiedene Werthe hat. Wenn aber λ drei verschiedene Werthe hat, so ergeben sich drei verschiedene Werthegruppen für $a\ b\ c$. — Es giebt demnach im Allgemeinen in einer Fläche zweiten Grades drei Richtungen, welche auf der conjugirten Ebene senkrecht stehen. — Jede solche Richtung heisst Hauptrichtung. — Es seien $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ die Wurzeln der Gleichung (9) und $(a_1\ b_1\ c_1)\ (a_2\ b_2\ c_2)\ (a_3\ b_3\ c_3)$ die drei ihnen entsprechenden Richtungen. — Dann wird z. B. die erste der drei Gleichungen (8) sowohl durch $a_1\ b_1\ c_1\ \lambda_1$ als durch $a_2\ b_2\ c_2\ \lambda_2$ befriedigt, und es ist also

$$(a_{11} - \lambda_1)\, a_1 + a_{12}\, b_1 + a_{13}\, c_1 = 0$$
$$(a_{11} - \lambda_2)\, a_2 + a_{12}\, b_2 + a_{13}\, c_2 = 0$$

Durch Elimination von a_{11} erhält man

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\, a_1\, a_2 + a_{12}\,(b_1\, a_2 - b_2\, a_1) + a_{13}\,(c_1\, a_2 - c_2\, a_1) = 0$$

Ebenso erhält man aus der zweiten der Gleichungen (8)

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\, b_1\, b_2 + a_{12}\,(a_1\, b_2 - a_2\, b_1) + a_{23}\,(c_1\, b_2 - c_2\, b_1) = 0$$

und aus der dritten

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\, c_1\, c_2 + a_{13}\,(a_1\, c_2 - a_2\, c_1) + a_{23}\,(b_1\, c_2 - b_2\, c_1) = 0.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen bekommt man

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\,(a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, e_2) = 0$$

Ebenso
$$(\lambda_1 - \lambda_3)\,(a_1\, a_3 + b_1\, b_3 + c_1\, c_3) = 0$$
$$(\lambda_3 - \lambda_2)\,(a_2\, a_3 + b_2\, b_3 + c_2\, c_3) = 0.$$

Folglich, wenn die drei Wurzeln der Gleichung (9) verschieden sind

$$\left.\begin{aligned} a_1\, a_2 + b_1\, b_2 + c_1\, c_2 &= 0 \\ a_1\, a_3 + b_1\, b_3 + c_1\, c_3 &= 0 \\ a_2\, a_3 + b_2\, b_3 + c_2\, c_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

d. h. die drei Hauptrichtungen stehen auf einander, jede auf jeder senkrecht. (Dieses Resultat lässt sich leicht auch geometrisch begründen.)

Legt man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Linie von der Richtung $a_1\; b_1\; c_1$ und bezeichnet die laufenden Coordinaten eines Punktes dieser Linie mit $x\; y\; z$, so sind $x\; y\; z$ den $a_1\; b_1\; c_1$ proportinal, fofglich stellen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1)\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z &= 0 \\ a_{21}\, x + (a_{22} - \lambda_1)\, y + a_{23}\, z &= 0 \\ a_{31}\, x + a_{32}\, y + (a_{33} - \lambda_1)\, z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

drei Ebenen dar, welche sich in dieser Linie schneiden, d. h. die Gleichungen (12) sind die Gleichungen der Linie.

Erörterung der besonderen Fälle, wo die Wurzeln der Gleichung (9) nicht alle verschieden sind.

1. Die Wurzeln der Gleichung

$$(\lambda - a_{22})\, (\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 = 0$$

welche mit β und γ bezeichnet sind, sind resp.

$$\frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} \text{ und } \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2}$$

Die kleinste der drei Wurzeln der Gleichung (9) ist also kleiner als die kleinere dieser beiden Zahlen, die zweite liegt zwischen ihnen, die dritte ist grösser als die grössere. — Gleiche Rollen spielen die Wurzeln der Gleichungen

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})\, (\lambda - a_{33}) - a_{13}^2 &= 0 \\ (\lambda - a_{11})\, (\lambda - a_{22}) - a_{12}^2 &= 0, \end{aligned}$$

d. h. die Zahlen

$$\frac{a_{11} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} \text{ und } \frac{a_{11} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2}$$

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2} \text{ und } \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}.$$

Wenn also zwei der drei Wurzeln $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ einander gleich sind, so muss, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ ist,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right) + a_{23}^2} = \frac{a_{11} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} =$$

$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2},$$

dagegen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} = \frac{a_{11} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} =$$
$$\frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}$$

sein, d. h. die vier Gleichungen

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - (\lambda - a_{11})\, a_{23}^2 - (\lambda - a_{22})\, a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})\, a_{12}^2 - 2a_{12}\, a_{23}\, a_{31} = 0$$
$$(\lambda - a_{22})\,(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 = 0$$
$$(\lambda - a_{11})\,(\lambda - a_{33}) - a_{13}^2 = 0$$
$$(\lambda - a_{11})\,(\lambda - a_{22}) - a_{12}^2 = 0$$

haben eine gemeinsame Wurzel, sie sind für einen gemeinsamen Werth von λ (nämlich $\lambda_1 = \lambda_2$), welcher jetzt λ' heissen möge, gleichzeitig erfüllt, d. h. es ist

$$(\lambda' - a_{11})(\lambda' - a_{22})(\lambda' - a_{33}) = (\lambda' - a_{11})\, a_{23}^2 = (\lambda' - a_{22})\, a_{13}^2 = (\lambda' - a_{33})\, a_{12}^2 = -\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$$

folglich ist

$$a_{11} - \lambda' = \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}} \qquad a_{22} - \lambda' = \frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} \qquad a_{33} - \lambda' = \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (12) einsetzt, so sieht man, dass sie alle in eine einzige, nämlich in die

$$a_{12}\, a_{13}\, x + a_{12}\, a_{23}\, y + a_{13}\, a_{23}\, z = 0 \tag{13}$$

übergehen, dass es also der Wurzel λ' entsprechend nicht eine sondern unendlich viele Hauptrichtungen gibt, welche sämmtlich in der Ebene (13) liegen. Die der Wurzel λ_3 entsprechende Hauptrichtung bleibt bestimmt und steht auf der Ebene (13) senkrecht.

Wenn demnach die Gleichung (9) zwei gleiche Wurzeln hat, so ist

$$a_{11} - \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}.$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, die Gleichung (9) wenigstens zwei gleiche Wurzeln hat. Denn bezeichnet man jede dieser drei gleichen Zahlen mit λ', so ist

$$a_{11} = \lambda' + \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}} \qquad a_{22} = \lambda' + \frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} \qquad a_{33} = \lambda' + \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke für $a_{11}\; a_{22}\; a_{33}$ in die Gleichung (9) ein, so geht sie über in

$$(\lambda' - \lambda)^2 \left(\lambda' - \lambda + \frac{a_{12}\, a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12}\, a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{12}}\right) = 0,$$

aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, dass sie zwei Wurzeln $= \lambda'$ hat. In diesem Falle sind also alle drei Wurzeln sehr einfach gegeben.

2. Damit alle drei Wurzeln einander gleich seien, ist **nothwendige** Bedingung, dass

$$\left(\frac{a_{22}-a_{33}}{2}\right)^2+a_{23}^2=0 \quad \left(\frac{a_{11}-a_{33}}{2}\right)^2+a_{13}^2=0 \quad \left(\frac{a_{11}-a_{22}}{2}\right)^2+a_{12}^2=0$$

und dies ist gleichbedeutend mit den fünf Bedingungen

$$a_{11}=a_{22}=a_{33} \qquad a_{12}=a_{23}=a_{31}=0.$$

Wenn diese fünf Bedingungen erfüllt sind, so reduciert sich die Gleichung (9) auf die

$$(\lambda-a_{11})^3=0.$$

Die Bedingungen sind also auch **genügend**. In diesem Falle sind die Hauptrichtungen vollständig unbestimmt, d. h. **jede** Richtung ist eine Hauptrichtung.

Es ist demnach bewiesen, dass es in jeder Fläche zweiten Grades im Allgemeinen und mindestens drei Hauptrichtungen gibt. Bei Mittelpunktsflächen heissen die Durchmesser, welche Hauptrichtungen haben, **Hauptaxen**. Die Ebene zweier Hauptaxen heisst **Hauptebene**. Bei den übrigen Flächen kommen diese Begriffe auch vor, bedürfen aber dort noch näherer Bestimmung.

§ 5. 1. **Unter welcher Bedingung gibt es eine Richtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt?**

Damit die der Richtung $(a\ b\ c)$ conjugirte Durchmesserebene, deren Gleichung in § 3 (unter 5) gegeben ist, in unendlicher Entfernung liege, muss

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\,a+a_{12}\,b+a_{13}\,c&=0\\ a_{21}\,a+a_{22}\,b+a_{23}\,c&=0\\ a_{31}\,a+a_{32}\,b+a_{33}\,c&=0 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

sein. Damit diese drei Gleichungen zusammenbestehen können, muss sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0. \tag{15}$$

In einer Mittelpunktsfläche tritt also selbstverständlich der fragliche Fall nicht ein; in jeder andern gibt es mindestens eine Richtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt; man findet sie durch Auflösung der Gleichungen (14). — Ist das Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so ist für diesen Fall $\lambda=0$ eine Wurzel der Gleichung (9). Das Gleichungssystem (14) ist also dasselbe wie das (8), d. h.: In jeder Fläche, die nicht Mittelpunktsfläche ist, liegt eine Hauptebene in unendlicher Entfernung, oder gibt es eine Hauptrichtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt.

2. **Unter welchen Bedingungen gibt es zwei oder mehr Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen?**

Damit das eintrete, muss dem Gleichungssystem (14) durch mehr als eine Werthegruppe von $(a\ b\ c)$ genügt werden. Das tritt aber nur dann ein, wenn dasselbe unendlich viele Werthegruppen für $a\ b\ c$ liefert, wenn die Werthe für $a\ b\ c$ unbestimmt werden, d. h. wenn

$$a_{11}:a_{12}:a_{13}=a_{21}:a_{22}:a_{23}=a_{31}:a_{32}:a_{33}.$$

Diese Bedingung ist aber dieselbe wie die, **dass die sechs Glieder zweiter Dimension in der Gleichung (1) ein vollständiges Quadrat bilden.**

Dann gibt es nicht bloss zwei sondern unendlich viele Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, aber sie alle sind einer sehr einfachen Bedingung unterworfen. — Wenn nämlich für drei Richtungen $(a\ b\ c)$ $(a_1\ b_1\ c_1)$ $(a_2\ b_2\ c_2)$ gleichzeitig die conjugirten Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, so muss für jede derselben das Gleichungssystem (14) erfüllt sein, müssen also alle drei z. B. der ersten der drei Gleichungen (14) genügen, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11}\,a + a_{12}\,b + a_{13}\,c &= 0 \\ a_{11}\,a_1 + a_{12}\,b_1 + a_{13}\,c_1 &= 0 \\ a_{11}\,a_2 + a_{12}\,b_2 + a_{13}\,c_2 &= 0 \end{aligned}$$

zusammen bestehen, d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

sein, d. h. die Richtungen $(a\ b\ c)$ $(a_1\ b_1\ c_1)$ $(a_2\ b_2\ c_2)$ müssen derselben Stellung angehören. Demnach: Alle Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, gehören derselben Stellung an.

Hieraus folgt: Unter den Hauptrichtungen einer Fläche zweiten Grades ist mindestens eine, deren conjugirte Durchmesserebene (Hauptebene) in endlicher Entfernung liegt.

§ 6. Es sei eine Fläche zweiter Ordnung auf eine in endlicher Entfernung liegende Hauptebene als XY-Ebene und auf eine auf ihr senkrechte Linie als Z-Axe bezogen. Ihre Gleichung kann dann die erste Potenz von z nicht enthalten, muss also die Form haben

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2a_{12}\,xy + 2a_{14}\,x + 2a_{24}\,y + a_{44} = 0 \qquad (16)$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der XY-Ebene ist eine Linie zweiten Grades. Abgesehen von dem besondern, späterer Erörterung vorzubehaltenden Falle wo gleichzeitig $a_{11} = 0$ $a_{22} = 0$ und $a_{12} = 0$ ist, wo also die Gleichung (16) die besondere Form

$$a_{33}\,z^2 + 2a_{14}\,x + 2a_{24}\,y + a_{44} = 0 \qquad (17)$$

annimmt, hat der Schnitt mit der XY-Ebene ein Paar bestimmte rechtwinklige conjugirte Richtungen und wenigstens einen Durchmesser, welcher alle auf ihm senkrechten Sehnen halbiert. Nehmen wir diesen Durchmesser als X-Axe und eine der ihr conjugirten Sehnen als Y-Axe, so erhält die Gleichung der Fläche die Form

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2a_{14}\,x + a_{44} = 0.$$

Durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten lässt sich diese Gleichung, wenn a_{11} von Null verschieden ist, auf die Form

$$a_{11}\,x^2 + a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44} = 0 \qquad (18)$$

und wenn $a_{11} = 0$ und a_{14} von Null verschieden ist, auf die Form

$$a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + 2a_{14}\,x = 0 \qquad (19)$$

bringen; wenn endlich $a_{11} = 0$ und auch $a_{14} = 0$ ist, so reducirt sie sich auf die Form

$$a_{22}\,y^2 + a_{33}\,z^2 + a_{44} = 0 \qquad (2$$

Die Gleichungen (17) bis (20) umfassen demnach sämmtliche Flächen zweiten Grades. Aus § 2 ergiebt sich, dass die Gleichung (18) in welcher $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ von Null verschieden sind, die Flächen mit bestimmtem endlich entfernten Mittelpunkte, die Gleichung (19) die Flächen mit einem unendlich entfernten Mittelpunkte, die Gleichung (20) die Flächen mit unendlich vielen Mittelpunkten in endlicher Entfernung, die im Allgemeinen in einer graden Linie, der Mittellinie liegen, die Gleichung (17) die Flächen mit unendlich entfernter Mittellinie darstellen. (S. § 5. 2.)

§ 7. Uebersichtliche Entwicklung und Beschreibung sämmtlicher Formen der Flächen zweiten Grades.

A. Die in der Gleichung (18) enthaltenen Flächen.

I. a_{44} sei von Null verschieden. — Wir dividiren durch $-a_{44}$

1. Die Coëfficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien sämmtlich negativ, so ist die Fläche imaginär.

2. Die Coëfficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien sämmtlich positiv.

Wir bezeichnen $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\alpha^2}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$,

so ist die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \tag{21}$$

Die Fläche ist gegen jede der drei Coordinaten-Ebenen symmetrisch.

Die Schnitte in den Coordinaten-Ebenen sind Ellipsen mit den Halbaxen $\alpha\, \beta\, \gamma$. Die Schnitte parallel den Coordinaten-Ebenen sind jenen ähnlich und sind um so kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind. In den Entfernungen $\pm\alpha$ resp. $\pm\beta$, $\pm\gamma$ vom Mittelpunkte reducirt sich die Schnittfigur auf einen Punkt, die Ebene berührt die Fläche. — Die Fläche ist vollständig begrenzt; sie liegt ganz in dem rechtwinkligen Parallelepipedon, dessen Ebenen die Gleichungen $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$, $z = \pm\gamma$ haben. Die Berührungspunkte mit diesen Ebenen sind die Scheitel der Fläche. Sie heisst Ellipsoid. — Alle ebenen Schnitte des Ellipsoids sind Ellipsen.

Es sei α die grösste, γ die kleinste der drei Halbaxen; irgend ein Radius des Ellipsoids (21) habe die Länge ρ und bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus $a\ b\ c$ seien, so ist $x = a\rho$ $y = b\rho$, $z = c\rho$

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

und da $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so ist

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) b^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) c^2$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) b^2,$$

folglich ist α der grösste und γ der kleinste Radius des Ellipsoids.

In der Ellipse der YZ-Ebene ist 2β die grosse Axe, in der Ellipse der XY-Ebene die kleine Axe. Legt man demnach durch die Y-Axe eine um dieselbe drehbare Ebene, lässt sie zunächst mit der YZ-Ebene zusammenfallen und dreht sie, so ist die Schnittfigur stets eine Ellipse, deren eine Axe fest ist, während die andre die XZ-Ebene durchläuft; diese letztere Axe ist anfangs die kleinere und wird später die grössere; es tritt also der Fall ein, wo beide Axen einander gleich sind; dann ist der Schnitt ein Kreis. Es giebt zwei solche Kreisschnitte; sie bilden mit der YZ-Ebene gleiche Winkel; ebenso mit der XY-Ebene.

Wenn von den drei Halbaxen $\alpha\ \beta\ \gamma$ zwei einander gleich sind, z. B. α und β, so sind alle Schnitte parallel der XY-Ebene Kreise; das Ellipsoid ist ein Revolutions-Ellipsoid. Die Umdrehungsaxe ist die Z-Axe. — Ein Revolutions-Ellipsoid kann seine grösste und seine kleinste Axe zur Umdrehungsaxe haben. In ihm fallen die beiden durch die mittlere Axe zu legenden Kreisschnitte in einen zusammen. —

Wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, so ist das Ellipsoid eine Kugel. In ihr sind die im § 4 No. 2 entwickelten Bedingungen dafür erfüllt, dass die Fläche unendlich viele Hauptrichtungen hat. — Umgekehrt, jede Fläche, in welcher diese Bedingungen erfüllt sind, ist eine Kugel. Denn diese Fläche hat allgemein die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,\frac{a_{14}}{a_{11}}\,x + 2\,\frac{a_{24}}{a_{11}}\,y + 2\,\frac{a_{34}}{a_{11}}\,z + \frac{a_{44}}{a_{11}} = 0,$$

welche sich sogleich auf die Form

$$\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{24}}{a_{11}}\right)^2 + \left(z + \frac{a_{34}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{24}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{34}}{a_{11}}\right)^2 + \frac{a_{44}}{a_{11}} = 0$$

bringen und dadurch als die einer Kugel erkennen lässt.

Hiernach lässt sich leicht erkennen, dass jede Fläche zweiten Grades, welche in dem Spezialfalle § 4. No. 1 enthalten ist, eine Revolutionsfläche ist.

Nimmt man einen beliebigen Durchmesser als Z-Axe, die conjugirte Ebene als XY-Ebene, darin irgend einen Durchmesser als X-Axe, den conjugirten als Y-Axe, so hat die Fläche auch für dieses schiefwinklige Axensystem eine Gleichung von der Form

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} + \frac{z^2}{\gamma_1^2} - 1 = 0.$$

Daraus ersieht man, dass alle parallelen Schnittfiguren des Ellipsoids ähnliche Ellipsen sind, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer Graden, nämlich dem ihrer gemeinsamen Stellung conjugirten Durchmesser liegen. Legt man durch die Endpunkte eines solchen Durchmessers eine Ebene, welche die conjugirte Stellung hat, so hat dieselbe mit der Fläche einen Punkt gemein und enthält alle diejenigen Tangenten, welche die durch den Durchmesser gelegten Schnittcurven in dem Punkte berühren; sie berührt die Fläche. Die Fläche ist ganz in einem schiefwinkligen Parallelepipedon enthalten, dessen Ebenen die Gleichungen $x = \pm\alpha_1$, $y = \pm\beta_1$, $z = \pm\gamma_1$ haben, enthalten und berührt diese Ebenen.

3. Es seien von den drei Coefficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ zwei positiv und einer negativ; es sei $-\frac{a_{11}}{a_{44}} = +\frac{1}{\alpha^2}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}} = +\frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}} = -\frac{1}{\gamma^2}$ so ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \tag{22}$$

Auch diese Fläche ist, wie alle in der Gleichung (18) enthaltenen Flächen, gegen jede der drei Coordinaten-Ebenen symmetrisch. Der Schnitt mit der XY-Ebene ist eine Ellipse; alle Ebenen parallel der XY-Ebene schneiden die Fläche in ähnlichen Ellipsen, und zwar in um so grösseren, je weiter die Ebenen vom Mittelpunkte entfernt sind. — Die Z-Axe hat keinen Punkt mit der Fläche gemein.

Der Schnitt mit der XZ-Ebene ist eine Hyperbel, welche ihre Hauptaxe in der X-Axe hat. Jeder Schnitt parallel der XZ-Ebene, dessen Entfernung vom Mittelpunkte nicht grösser ist als β, ist eine Hyperbel, welche ihre Hauptaxe parallel der X-Axe hat; jeder Schnitt parallel der XZ-Ebene, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $> \beta$ ist, ist eine Hyperbel, deren Hauptaxe parallel der Z-Axe ist; die Grenze zwischen beiden, im Scheitel der Y-Axe, ist ein System zweier graden Linien; sie haben die allen eben bezeichneten Hyperbeln gemeinsamen Asymptotenrichtungen. — Die analogen Erscheinungen zeigen die Schnitte parallel der YZ-Ebene. — Die Fläche heisst einschaliges Hyperboloid.

Legt man durch die Y-Axe eine um dieselbe drehbare Ebene und lässt dieselbe zuerst mit der XY-Ebene zusammenfallen um sie nachher bis zur YZ-Ebene hinzudrehen, so ist der Schnitt anfangs eine Ellipse, deren eine Axe constant ist, deren zweite Axe bei der Drehung continuirlich wächst; es zeigt sich, dass sie in eine Hyperbel übergeht, deren Hauptaxe in der Y-Axe liegt und constant bleibt; die Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel bildet ein System zweier parallelen Graden; sie liegen in den beiden oben bezeichneten Ebenen, welche durch die in der Y-Axe gelegenen Scheitel parallel der XZ-Ebene gelegt werden und sind je eine von den beiden Linien, in welchen jede von diesen die Fläche schneidet. — Dasselbe zeigt sich bei der Drehung um die X-Axe. — Wenn die Drehung um die längere Axe der in der XY-Ebene gelegenen Ellipse erfolgt, so kommt unter den Formen der elliptischen Schnitte auch der Kreis vor, und zwar in zwei Ebenen, welche mit der XY-Ebene gleiche Winkel bilden. — Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist die Fläche eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Nebenaxe entsteht. — Dann fallen die beiden Kreisschnitte in einen zusammen.

Schreibt man die Gleichung (22) folgendermassen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2}$$

so erkennt man, dass ihr genügt wird durch jeden gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} &= \varkappa\left(1 - \frac{y}{\beta}\right) \\ \varkappa\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right) &= 1 + \frac{y}{\beta} \end{aligned}\right\}$$

und ebenso durch jeden gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} &= \varkappa\left(1 + \frac{y}{\beta}\right) \\ \varkappa\left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma}\right) &= 1 - \frac{y}{\beta} \end{aligned}\right\}$$

wo $\varkappa$ eine willkürliche Grösse bezeichnet. Daraus ergibt sich, dass die Fläche zwei Systeme von unendlich vielen Graden enthält.

Zwei Grade desselben Systems haben keinen Punkt gemeinsam, denn die vier Ebenen

$$\frac{x}{\alpha} + \varkappa \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \varkappa = 0$$
$$\varkappa \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \varkappa \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$
$$\frac{x}{\alpha} + \varkappa_1 \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \varkappa_1 = 0$$
$$\varkappa_1 \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \varkappa_1 \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$

haben keinen Punkt gemein, weil die Determinante, wovon dies abhängig ist, den Werth $-\frac{4(\varkappa - \varkappa_1)^2}{\alpha\beta\gamma}$ hat, also nicht Null ist. — Ebenso für zwei Grade des zweiten Systems.

Dagegen hat jede Grade des einen Systems mit jeder Graden des andern Systems einen Punkt gemein.

Dies ist dadurch bedingt, dass die vier Ebenen

$$\frac{x}{\alpha} + \varkappa \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \varkappa = 0$$
$$\varkappa \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + \varkappa \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$
$$\frac{x}{\alpha} - \varkappa_1 \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \varkappa_1 = 0$$
$$\varkappa_1 \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \varkappa_1 \frac{z}{\gamma} - 1 = 0$$

einen Punkt gemein haben; dies findet immer statt, weil die bezügliche Determinante identisch Null ist. — Die Ebene, welche die beiden Graden enthält, hat die Gleichung

$$\frac{1 + \varkappa\varkappa_1}{\alpha} x + \frac{\varkappa - \varkappa_1}{\beta} y - \frac{1 - \varkappa\varkappa_1}{\gamma} z - (\varkappa + \varkappa_1) = 0. \qquad (23)$$

Für jedes beliebige Werthepaar von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ hat also diese Ebene mit der Fläche (22) zwei grade Linien gemein.

4. Es seien von den drei Coefficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ einer positiv, zwei negativ; es sei $\frac{a_{11}}{a_{44}} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{a_{22}}{a_{44}} = \frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}} = \frac{1}{\gamma^2}$, so geht die Gleichung (18) über in die

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0. \qquad (24)$$

Die Fläche hat mit der XY-Ebene und mit allen ihr parallelen Ebenen deren Entfernungen vom Mittelpunkte beiderseitig nicht grösser als γ sind, keinen Punkt gemein; die Ebenen $z = \pm\gamma$ haben mit der Fläche je einen Punkt gemein, den Scheitel. Jede Ebene $z = \pm\varepsilon$, wo $\varepsilon > \gamma$ ist, schneidet die Fläche in einer Ellipse, deren Axen der X- und der Y-Axe parallel sind; alle diese Ellipsen sind ähnlich, die Fläche besteht aus zwei getrennten Schalen.

Die XZ-Ebene und jede ihr parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Hyperbel; alle diese Hyperbeln sind einander ähnlich und haben ihre Hauptaxen parallel der Z-Axe. — Die YZ-Ebene und jede ihr parallele Ebene schneidet ebenfalls die Fläche in einer Hyperbel, auch diese Hyperbeln sind sämmtlich einander ähnlich und haben ihre Hauptaxen parallel der Z-Axe. — Die Fläche heisst zweischaliges Hyperboloid.

Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist die Fläche eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entsteht. —

II. Der Coefficient a_{44} der Gleichung (18) sei Null.

1. Die drei Coefficienten $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ haben gleiche Vorzeichen. Die Fläche reducirt sich auf den Anfangspunkt der Coordinaten.

2. Die drei Coefficienten $a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$ haben nicht sämmtlich gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \qquad (25)$$

Die XY-Ebene hat mit der Fläche einen Punkt gemein; jede ihr parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Ellipse; alle diese Ellipsen sind einander ähnlich und haben ihre Axen parallel der X- und der Y-Axe. Der Schnitt mit der XZ-Ebene ist ein System zweier graden Linien, welche mit der Z-Axe gleiche Winkel bilden; jeder parallele Schnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten den Durchschnittslinien mit der XZ-Ebene parallel sind. — Ebenso für die YZ-Ebene.

Die Gleichung (25) ist homogen. Wenn also ein Punkt $x\,y\,z$ der Fläche angehört, so gehört der Punkt tx, ty, tz für einen beliebigen Werth von t auch der Fläche an, d. h. sie wird von einer unendlichen Schaar grader Linien erfüllt, welche vom Mittelpunkte ausgehen. — Die Fläche heisst Kegel.

Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist der Kegel eine Umdrehungsfläche, ein sogenannter grader Kreiskegel.

B. Die in der Gleichung (19) enthaltenen Flächen.

Es wird vorausgesetzt, dass alle Coefficienten von Null verschieden sind, indem der Fall, wo $a_{14} = 0$ ist, in der Gleichung (20) und der Fall, wo a_{22} oder $a_{33} = 0$ ist, in der Gleichung (17) enthalten ist.

1. a_{22} und a_{33} haben gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} + 2\,\frac{x}{\delta} = 0. \qquad (26)$$

Die YZ-Ebene berührt die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten, im Scheitel der Fläche. — Diese liegt ganz auf einer Seite der YZ-Ebene. Alle reellen Schnitte parallel der YZ-Ebene sind Ellipsen von gleichem Axenverhältnis und parallelen Axen; sie sind um so grösser, je weiter ihre Ebenen vom Anfangspunkt entfernt sind.

Die XZ-Ebene sowohl wie die YZ-Ebene und alle ihnen parallelen Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln, deren Axen sämmtlich in der Richtung der X-Axe und sämmtlich nach derselben Seite hin liegen. — Die Fläche heisst elliptisches Paraboloid. Wenn $\beta = \gamma$, so ist sie eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Parabel um ihre Axe entsteht.

2. a_{22} und a_{33} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 2\,\frac{x}{\delta} = 0. \qquad (27)$$

Die YZ-Ebene hat mit der Fläche zwei grade Linien gemein, welche sich im Anfangspunkte, dem Scheitel der Fläche, schneiden. Jede Ebene parallel der YZ-Ebene schneidet die Fläche in einer Hyperbel; alle diese Hyperbeln haben ihre Asymptoten den beiden in der YZ-Ebene enthaltenen Linien der Fläche parallel; alle Hyperbeln auf der einen Seite der YZ-Ebene gehören dem einen Asymptotenwinkel, alle auf der andern Seite dem andern Asymptotenwinkel an. Alle Schnitte parallel der XY-Ebene, und ebenso alle parallel der XZ-Ebene sind Parabeln; alle ihre Axen sind parallel der X-Axe, aber in den Parabeln der einen Gruppe sind sie nach der einen Seite, in denen der andern Gruppe nach der entgegengesetzten Seite gerichtet. Die Fläche heisst hyperbolisches Paraboloid.

Jeder Punkt, welcher gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = \varkappa$$
$$\varkappa\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) = -2\frac{x}{\delta}$$

genügt, liegt in der Fläche (27). Ebenso jeder Punkt, welcher gleichzeitig den Gleichungen

$$\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \varkappa$$
$$\varkappa\left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right) = -2\frac{x}{\delta}$$

genügt. Daraus ergibt sich, dass die Fläche zwei Systeme von unendlich vielen graden Linien enthält. Wie beim einschaligen Hyperboloid lässt sich auch hier zeigen, dass zwei Grade desselben Systems nie einen Punkt gemein haben, dass aber jede Grade des einen Systems mit jeder Graden des andern Systems einen Punkt gemein hat. Die Ebene, welche die Graden

$$\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = \varkappa \qquad\qquad \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \varkappa_1$$
$$\varkappa\left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma}\right) = -2\frac{x}{\delta} \qquad\qquad \varkappa_1\left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right) = -2\frac{x}{\delta}$$

enthält, hat die Gleichung

$$2\frac{x}{\delta} + (\varkappa + \varkappa_1)\frac{y}{\beta} + (\varkappa - \varkappa_1)\frac{z}{\gamma} - \varkappa\varkappa_1 = 0. \tag{28}$$

Für jedes beliebige Werthepaar von $\varkappa$ und $\varkappa_1$ hat also diese Ebene mit der Fläche zwei Grade gemein.

C. Die in der Gleichung (20) enthaltenen Flächen.

I. a_{44} sei von Null verschieden. Wir dividiren durch $-a_{44}$

1. $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien beide negativ. Die Fläche ist imaginär.

2. $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien beide positiv. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \tag{29}$$

Alle Schnitte parallel der YZ-Ebene sind congruente Ellipsen mit parallelen Axen. Jede Ebene, deren Gleichung $\frac{z}{\gamma} = \varepsilon$ ist, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden, sofern ε zwischen $+1$ und -1 liegt; für $\varepsilon = \pm 1$ fallen die beiden Graden in eine zusammen. Ebenso für jede Ebene, deren Gleichung $\frac{y}{\beta} = \varepsilon$ ist. — Die Fläche ist ein elliptischer Cylinder. Wenn man einen der elliptischen Schnitte, welche der YZ-Ebene parallel sind, um die grosse Axe dreht, so gelangt man in zwei Stellungen, welche mit der YZ-Ebene gleiche Winkel bilden, zu Kreisschnitten. Wenn $\beta = \gamma$, so fallen diese beiden in einen zusammen, die Fläche ist ein Umdrehungs-Cylinder.

3. $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ haben entgegesetzte Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \tag{30}$$

Alle Schnitte parallel der YZ-Ebene sind congruente Hyperbeln mit parallelen Axen. Jede Ebene, parallel der XY-Ebene, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden; jede Ebene, deren Gleichung $\frac{y}{\beta} = \varepsilon$ ist, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden, sofern $\varepsilon^2 > 1$; für $\varepsilon = \pm 1$ fallen die beiden Graden in eine zusammen. Die Fläche ist ein hyperbolischer Cylinder.

4. Von den beiden Coefficienten a_{22} und a_{33} sei einer Null. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\pm \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0. \tag{31}$$

Sie stellt ein System zweier Ebenen, welche der XZ-Ebene parallel sind und zu beiden Seiten derselben in der Entfernung β liegen, oder eine imaginäre Fläche dar.

II. a_{44} sei Null.

1. a_{22} und a_{33} haben gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \tag{32}$$

Die Fläche reducirt sich auf die X-Axe.

2. a_{22} und a_{33} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \tag{33}$$

Die Fläche besteht aus zwei Ebenen, welche auf der YZ-Ebene senkrecht stehen und mit der Y-Axe gleiche Winkel bilden; ebenso mit der Z-Axe.

3. Von den Coefficienten a_{22} und a_{33} sei einer Null, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\frac{y^2}{\beta^2} = 0. \tag{34}$$

Die Fläche reducirt sich auf die XZ-Ebene.

D. Die in der Gleichung (17) enthaltenen Flächen. —

Jeder Schnitt parallel der XY-Ebene ist eine Grade; alle diese Graden sind parallel. Alle Schnitte parallel der XZ-Ebene sind congruente Parabeln von gleicher Axenrichtung; ebenso alle Schnitte parallel der YZ-Ebene. Die Fläche ist ein parabolischer Cylinder. Die Gestalt der Fläche tritt noch leichter hervor, wenn man die Linie

$$2a_{14}\,x + 2a_{24}\,y + a_{44} = 0 \qquad z = 0$$

zur Y-Axe, irgend eine in der XY-Ebene darauf senkrechten Linie zur X-Axe, und die im Durchschnittspunkte auf beiden senkrechte Linie zur Z-Axe macht. Dann erhält die Gleichung die Gestalt

$$\frac{z^2}{\gamma^2} + 2\,\frac{x}{\delta} = 0. \tag{35}$$

§ 8. Fundamentalsätze von Tangenten und Polaren.

1. Die Entfernung des Punktes $x\ y\ z$ vom Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ wird durch den Punkt

$$\frac{\lambda\,x_1 + \lambda_1\,x}{\lambda + \lambda_1},\quad \frac{\lambda\,y_1 + \lambda_1\,y}{\lambda + \lambda_1},\quad \frac{\lambda\,z_1 + \lambda_1\,z}{\lambda + \lambda_1}$$

in dem Verhältnisse $\lambda : \lambda_1$ getheilt. Soll der letztgenannte Punkt in der Fläche (1) liegen, so wird diese Bedingung durch die Gleichung ausgedrückt, welche man erhält, wenn man die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung (1) substituirt. Diese Gleichung wird dann, nach λ und λ_1 geordnet, wenn man $f\,(x\ y\ z)$ mit U, $f\,(x_1\ y_1\ z_1)$ mit U_1 und

$$a_{11}\,xx_1 + a_{22}\,yy_1 + a_{33}\,zz_1 + a_{12}\,(xy_1 + x_1\,y) + a_{13}\,(xz_1 + x_1\,z) + a_{23}\,(yz_1 + y_1\,z)$$
$$+ a_{14}\,(x + x_1) + a_{24}\,(y + y_1) + a_{34}\,(z + z_1) + a_{44}$$

mit V bezeichnet,

$$U\lambda_1^2 + U_1\,\lambda^2 + 2\,V\lambda\lambda_1 = 0. \tag{36}$$

Diese Gleichung ergibt zwei Werthe für das Verhältniss $\lambda : \lambda_1$ weil im Allgemeinen die Fläche mit der Linie zwei Punkte gemein hat. Sollen die beiden Werthe für $\lambda : \lambda_1$ einander gleich sein, d. h. sollen die beiden Punkte in einen zusammenfallen, so muss

$$V^2 - UU_1 = 0 \tag{37}$$

sein. Diese Gleichung drückt also die Bedingung dafür aus, dass der Punkt $x\ y\ z$ in einer vom Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ an die Fläche gelegten Tangenten liegt, d. h. sie ist die Gleichung einer Fläche, welche alle vom Punkte $x_1\ y_1\ z_1$ an die Fläche (1) gelegten Tangenten enthält. Das ist eine Kegelfläche.

Man erhält die Gleichung einer Fläche, welche alle den Flächen

$$U = 0$$
$$V^2 - UU_1 = 0$$

gemeinsamen Punkte enthält, indam man die erstere mit U_1 multiplicirt und dann zur zweiten addirt. Man erhält dadurch die Gleichung

$$V^2 = 0$$

und schliesst daraus, dass die Berührungspunkte aller von einem Punkte an eine Fläche zweiten Grades gelegten Tangenten in einer Ebene liegen, also einen Kegelschnitt erfüllen.

Wenn insbesondere der Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ ein Punkt der Fläche (1) ist, so ist $U_1 = 0$; die Gleichung (37) reducirt sich also dann auf die $V^2 = 0$ oder $V = 0$, d. h. sämmtliche Tangenten in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades liegen in einer Ebene, der Tangentialebene. Ihre Gleichung ist

$$(a_{11}\, x_1 + a_{12}\, y_1 + a_{13}\, z_1 + a_{14})\, x + (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, y_1 + a_{23}\, z_1 + a_{24})\, y +$$
$$(a_{31}\, x_1 + a_{32}\, y_1 + a_{33}\, z_1 + a_{34})\, z + (a_{41}\, x_1 + a_{42}\, y_1 + a_{43}\, z_1 + a_{44}) = 0. \quad (38)$$

Für die besonderen Formen der Gleichungen (21) bis (35) nimmt die Gleichung der Tangentialebene besonders einfache Formen an; ihre Entwicklung ist eine einfache gute Uebung; sie sollen hier nicht aufgezählt werden.

2. Die Bedingung, dass die beiden Werthe für $\lambda : \lambda_1$ in der Gleichung (36) gleiche absolute Werthe aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. dass die beiden Punkte $x\, y\, z$ und $x_1\, y_1\, z_1$ und die Durchschnittspunkte mit der Fläche harmonische Punkte sind, ist gegeben durch die Gleichung

$$V = 0.$$

Demnach ist der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes zu den beiden Schnitten einer graden Linie, welche von einem festen Punkte ausgeht, mit einer Fläche zweiten Grades und zu dem festen Punkte eine Ebene. Sie heisst die Polarebene des Punktes.

Wenn der Punkt in der Fläche liegt, so ist seine Polarebene die Tangentialebene. Wenn der Punkt ausserhalb der Fläche liegt, so ist seine Polarebene diejenige Ebene, welche die Berührungspunkte des bezüglichen Berührungskegels enthält.

Aus der Symmetrie der Gleichung $V = 0$ in Bezug auf den Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ einerseits und den Punkt $x\, y\, z$ andrerseits ergibt sich, dass die Polarebenen aller Punkte einer Ebene sich in einem Punkte, dem Pole der Ebene schneiden, und dass die Pole aller Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, in einer Ebene liegen, der Polarebene des Punktes. Ferner: Die Polarebenen aller Punkte einer Graden haben eine Grade gemein, und die Pole aller Ebenen, welche eine Grade gemein haben, liegen in einer Graden.

3. Die Bedingung, dass die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (39)$$

Tangentialebene der Fläche (1) sei, ist dieselbe wie die, dass es einen Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ gebe, welcher erstens die Gleichung (38) der Gleichung (39) identisch mache, und welcher zweitens auf der Fläche $U = 0$, oder was dasselbe ist, auf der Ebene (39) liege.

Die erste dieser beiden Bedingungen wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, y_1 + a_{13}\, z_1 + a_{14} + \lambda\, A &= 0\\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, y_1 + a_{23}\, z_1 + a_{24} + \lambda\, B &= 0\\
a_{31}\, x_1 + a_{32}\, y_1 + a_{33}\, z_1 + a_{34} + \lambda\, C &= 0\\
a_{41}\, x_1 + a_{42}\, y_1 + a_{43}\, z_1 + a_{44} + \lambda\, D &= 0
\end{aligned}$$

dargestellt; die zweite durch die Gleichung

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Die Bedingung, dass diese fünf Gleichungen zusammen bestehen können, ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{40}$$

Wenn man z. B. diese Bedingungen auf die Gleichungen (23) und (28) anwendet, so erkennt man, dass diese Ebenen Tangentialebenen der betreffenden Flächen sind; diese Tangentialebenen haben also mit der berührten Fläche nicht einen Punkt, sondern zwei grade Linien gemein; sie enthalten alle Tangenten der Fläche, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Graden gehen, und berühren die Flächen in diesem Punkte.

4. Die Bedingung, dass eine Grade

$$\left.\begin{array}{l} A\,x + B\,y + C\,z + D = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{array}\right\} \tag{41}$$

Tangente an die Fläche (1) sei, lässt sich folgendermassen entwickeln. Die Gleichung irgend einer Ebene, welche durch die Grade (41) geht ist.

$$(A + \lambda\, A_1)\, x + (B + \lambda\, B_1)\, y + (C + \lambda\, C_1)\, z + (D + \lambda\, D_1) = 0.$$

Die Bedingung, dass diese Ebene die Fläche (1) berühre ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A+\lambda A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B+\lambda B_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C+\lambda C_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D+\lambda D_1 \\ A+\lambda A_1 & B+\lambda B_1 & C+\lambda C_1 & D+\lambda D_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf λ vom zweiten Grade, d. h. durch eine gegebene Grade lassen sich im Allgemeinen zwei Berührungsebenen an eine Fläche zweiten Grades legen. Die Bedingung, dass die Linie (41) Tangente an die Fläche sei, ist im Allgemeinen, nämlich abgesehen von Besonderheiten, welche bei den Regelflächen und speciell beim Kegel eintreten, keine andere als die, dass die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung einander gleich seien. Dieser Bedingung kann man folgende Form geben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B & B_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C & C_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D & D_1 \\ A & B & C & D & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{42}$$

Die Umformung führt sich am einfachsten durch den in Brioschi's Determinantentheorie § 6 Gleichung 56 enthaltenen Satz aus. Will man diesen Satz nicht voraussetzen, sondern sich nur auf die elementarsten Eigenschaften der Determinanten stützen, so wird die Rechnung allerdings erheblich länger, hat aber gar keine Schwierigkeit; sie wird deshalb hier nicht ausgeführt.

§ 9. Die graden Linien und die Tangentialebenen der Flächen zweiten Grades.

1. Eine Fläche, welche grade Linien enthält, heisst Regelfläche. Die einfachste Regelfläche zweiten Grades ist der Kegel, als dessen Spezialfälle die Cylinder anzusehen sind.

Die Gleichung des Kegels, welche wir unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten der Betrachtung zu Grunde legen, ist

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \tag{43}$$

Demnach erfüllen alle Richtungen $(a\ b\ c)$, welche der Kegelfläche angehören, und nur sie, die Bedingung

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} = 0.$$

Wenn drei Zahlen $p\ q\ r$ die Bedingung $p^2 + q^2 - r^2 = 0$ erfüllen, so gibt es immer eine Zahl t von solcher Beschaffenheit, dass $p\ q\ r$ den Zahlen $t^2 - 1$, $2t$ und $t^2 + 1$ proportional sind und zwar ist $t = \frac{q}{r - p}$. Demnach sind allgemein die Gleichungen jeder Graden, welche in der Kegelfläche liegt

$$\frac{x}{\alpha(\lambda^2 - 1)} = \frac{y}{2\beta\lambda} = \frac{z}{\gamma(\lambda^2 + 1)}. \tag{44}$$

Für jede Grade, durch den Mittelpunkt, welche im Innern des Kegels liegt, d. h. durch innere Punkte der Ellipsenschnitte geht, ist

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} < 0.$$

ihre Gleichungen also allgemein

$$\frac{x}{\alpha(\lambda^2 - 1)} = \frac{y}{2\beta\lambda} = \frac{\varepsilon z}{\gamma(\lambda^2 + 1)}$$

wenn $\varepsilon^2 < 1$. Dieselbe Gleichung stellt, wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, eine Grade dar, welche im äusseren Raume liegt.

2. Jede Linie durch den Mittelpunkt des Kegels ist nach § 8. 4. Tangente des Kegels; jede Ebene durch den Mittelpunkt des Kegels ist nach § 8. 3. Tangentialebene des Kegels. — In hervorragendem Sinne führen diesen letzteren Namen diejenigen Ebenen, welche mit der Kegelfläche zwei zusammenfallende Grade gemein haben. Jede Ebene durch den Mittelpunkt hat nämlich entweder mit dem Kegel nur diesen Mittelpunkt gemein, jede ihr parallele Ebene schneidet den Kegel in einer Ellipse; oder sie hat mit dem Kegel zwei Grade gemein, jede ihr parallele Ebene schneidet dann den Kegel in einer Hyperbel; oder, und das ist der Grenzfall zwischen beiden, sie hat mit ihr

eine Grade gemein, in welcher zwei Kegelkanten zusammenfallend gedacht werden müssen; jede ihr parallele Ebene schneidet den Kegel in einer Parabel. — Die Bedingung, dass die Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

mit dem Kegel
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

zwei zusammenfallende Grade gemein habe, lässt sich dadurch entwickeln, dass man zwischen beiden Gleichungen x eliminirt, also die Projection der Schnittfigur auf die YZ-Ebene durch ihre Gleichung darstellt; das ergibt eine homogene Gleichung zweiten Grades mit zwei Variabeln, welche sich stets in zwei relle oder imaginäre Factoren zerlegen lässt, je nachdem

$$A^2\,\alpha^2 + B^2\,\beta^2 - C^2\,\gamma^2 \gtrless 0 \tag{45}$$

ist; der Grenzfall, dass die beiden Faktoren einander gleich sind, ist gegeben durch die Bedingung

$$A^2\,\alpha^2 + B^2\,\beta^2 - C^2\,\gamma^2 = 0. \tag{46}$$

Demnach ist aus gleichen Gründen wie unter (1) die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, welche mit der Kegelfläche zwei zusammenfallende Grade gemein hat

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha}\,x + \frac{2\,\lambda}{\beta}\,y - \frac{\lambda^2 + 1}{\gamma}\,z = 0. \tag{47}$$

Die Vorzeichen der Glieder dieser Gleichung sind offenbar ganz willkürlich; die hier vorliegenden sind gewählt, weil bei dieser Wahl die Ebene (47) die Linie (44) enthält.

Jede durch den Anfangspunkt, den Mittelpunkt des Kegels, gelegte Ebene, lässt sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha}\,x + \frac{2\,\lambda}{\beta}\,y - \frac{\varepsilon\,(\lambda^2 + 1)}{\gamma}\,.\,z = 0. \tag{48}$$

darstellen. Aus der Bedingung (45) ergiebt sich, dass wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, die Ebene (48) mit der Kegefläche nur den Mittelpunkt gemein hat, dass jede ihr parallele Ebene den Kegel in einer Ellipse schneidet; dass wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist, die Ebene (48) mit der Kegelfläche zwei grade Linien gemein hat, dass jede ihr parallele Ebene den Kegel in einer Hyperbel schneidet, deren Asymptoten jenen beiden Graden parallel sind.

3. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + \omega = 0 \tag{49}$$

stellt eine Schaar von unendlich vielen einschaligen und zweischaligen Hyperboloiden dar, wenn ω alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, während $\alpha\,\beta\,\gamma$ ungeändert bleiben; alle diese Hyperboloide haben gleiche Axenverhältnisse; ein Spezialfall derselben, für $\omega = 0$, ist der Kegel. Wir erkennen die gegenseitigen Beziehungen dieser Schaar von Flächen, wenn wir nur die drei Flächen (22) (24) (25)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0 \tag{22}$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0 \tag{24}$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} \quad = 0 \tag{25}$$

in Betracht ziehen.

Legen wir dem z einen beliebigen constanten Werth z_1 bei, so werden alle drei Flächen in ähnlichen Ellipsen geschnitten; (die drei Flächen werden von jeder Ebene in ähnlichen, ähnlich liegenden Figuren geschnitten). Die drei Ellipsen haben ihren gemeinsamen Mittelpunkt in der Z-Axe; die grösste Ellipse gehört dem einschaligen Hyperboloide (22), die mittlere dem Kegel (25), die kleinste dem zweischaligen Hyperboloide (24) an. Die beiden elliptischen Ringe zwischen den drei Ellipsen sind stets gleich gross, und, da wir rechtwinklige Coordinaten angenommen haben, $= \alpha\beta\pi$. Ihre Grösse ist also von der Grösse der z_1 unabhängig; sie werden also um so schmaler, je grösser z_1 wird, und wenn z_1 unendlich wird, so werden die Ringe unendlich schmal, d. h. der Kegel ist gemeinsamer Asymptotenkegel für die Hyperboloide (22) u. (24), oder auch für alle Hyperboloide (49).

Diese Beziehungen treten durch die folgenden Betrachtungen noch viel schärfer hervor. Jede Ebene lässt sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z + \varkappa = 0 \tag{50}$$

darstellen. Diese Ebene wird, wie sich aus der Bedingungsgleichung (40) in § 8 ergiebt, Tangentialebene der Fläche (22) sein, wenn

$$\varkappa^2 = (\lambda^2 + 1)^2 \, (1 - \varepsilon^2) \tag{51}$$

ist. Diese Gleichung ergibt nur dann reelle Werthe für $\varkappa$, wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist. Wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche stets in einer Ellipse, welche sich nie auf einen Punkt reduciren und nie imaginär werden kann. Wenn $\varepsilon^2 <$ ist, so hat die Ebene (50) mit der Fläche (22) eine Hyperbel gemein, welche in ein System zweier grader Linien übergeht, wenn $\varkappa$ den besonderen durch die Gleichung (51) bestimmten Werth hat.

Jede Tangentialebene der Fläche (22) lässt sich also durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z \pm (\lambda^2 + 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0 \tag{52}$$

darstellen*). Durch Vergleichung der unteren dieser beiden Gleichungen mit der Gleichung (38), welche für die Fläche (22) die besondere Gestalt

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} - \frac{zz_1}{\gamma^2} - 1 = 0$$

annimmt, erhält man für die Coordinaten der Berührungspunkte

$$x_1 = \frac{(\lambda^2 - 1)\alpha}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad y_1 = \frac{2\lambda\beta}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad z_1 = \frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \tag{53}$$

*) Diese Gleichung (52) lässt sich unmittelbar auf die Gleichung (23) zurückführen und somit darthun, dass auch die Gleichung (23) alle Tangentialebenen darstellt, mithin auch die ihr vorhergehenden Gleichungen alle Graden des Hyperboloids.

Die Gleichungen der beiden Graden, welche dieselbe Ebene mit der Fläche (22) gemein hat, sind

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{(\lambda^2-1)\,\varepsilon-2\lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{\dfrac{y}{\beta}-\dfrac{2\lambda}{(\lambda^2+1)\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{(\lambda^2-1)\sqrt{1-\varepsilon^2}+2\,\varepsilon\lambda}=\frac{\dfrac{z}{\gamma}-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{\lambda^2+1}\\
\text{und}\quad&\frac{\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{(\lambda^2-1)\,\varepsilon+2\lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{\dfrac{y}{\beta}-\dfrac{2\lambda}{(\lambda^2+1)\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{(\lambda^2-1)\sqrt{1-\varepsilon^2}-2\,\varepsilon\lambda}=\frac{\dfrac{z}{\gamma}-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}}{\lambda^2+1}
\end{aligned}\right\}\quad(54)$$

Die Ebene (50) wird Tangentialebene der Fläche (24), wenn

$$\varkappa^2=(\lambda^2+1)^2\,(\varepsilon^2-1). \qquad (55)$$

Diese Gleichung ergibt nur dann relle Werthe für $\varkappa$, wenn $\varepsilon^2>1$. Wenn $\varepsilon^2<1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche (24) in einer Hyperbel, welche sich nie auf zwei grade Linien reducirt. Wenn $\varepsilon^2>1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche (27) in einer Ellipse, welche auch imaginär werden kann, und welche in dem Falle, wo $\varkappa$ die Bedingung (55) erfüllt, sich auf einen Punkt reducirt. Jede Berührungsebene der Fläche (24) lässt sich also durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2-1}{\alpha}\,x+\frac{2\lambda}{\beta}\,y-\frac{\varepsilon(\lambda^2+1)}{\gamma}\,z\pm(\lambda^2+1)\sqrt{\varepsilon^2-1}=0 \qquad (56)$$

darstellen. Die Coordinaten des Berührungspunktes der durch die obere dieser beiden Gleichungen dargestellten Ebenen sind

$$x_1=\frac{(\lambda^2-1)\,\alpha}{(\lambda^2+1)\sqrt{\varepsilon^2-1}}\qquad y_1=\frac{2\lambda\beta}{(\lambda^2+1)\sqrt{\varepsilon^2-1}}\qquad z_1=\frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}. \qquad (57)$$

Wenn $\varepsilon=1$ ist, so fallen die Gleichungen (52) und (56) in eine einzige, und zwar in die Gleichung (47) zusammen; die Berührungspunkte fallen ins Unendliche; die Linien (54) werden einander und der Linie (44) parallel. D. h. Alle Graden des Kegels (25) berühren die Flächen (22) und (24) in unendliche Entfernungen; alle Ebenen, welche den Kegel (25) längs einer Graden berühren, berühren die Flächen (22) und (24) in unendlicher Entfernung und haben mit der Fläche (22) zwei diametral gegenüberstehende Grade gemein, welche einander und den Graden des Kegels parallel sind.

Hiernach übersieht man alle gegenseitigen Lagenbeziehungen der in der Gleichung (49) enthaltenen Flächen vollständig.

4. Auf ganz gleichem Wege findet man, dass jede Tangentialebene des Ellipsoids (21)

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0. \qquad (21)$$

sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2-1}{\alpha}\,x+\frac{2\lambda}{\beta}\,y+\frac{\varepsilon(\lambda^2+1)}{\gamma}\,z\pm(\lambda^2+1)\sqrt{1+\varepsilon^2}=0$$

darstellen lässt, und dass die Coordinaten der Berührungspunkte der durch die untere Gleichung dargestellten Ebene sind:

$$x_1 = \frac{(\lambda^2 - 1)\,\alpha}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \qquad y_1 = \frac{2\,\lambda\,\beta}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \qquad z_1 = \frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}.$$

5. Jede Tangential-Ebene des elliptischen Paraboloids (26)

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} + 2\,\frac{x}{\delta} = 0 \tag{26}$$

wird durch die Gleichung

$$x + \frac{\lambda}{\beta}\,y + \frac{\mu}{\gamma}\,z - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2\,\delta} = 0 \tag{58}$$

dargestellt. Es ergibt sich daraus, dass bei dieser Fläche die Tangential-Ebenen nicht paarweise parallel sind, was bei den vorigen der Fall war. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2\,\delta} \qquad y_1 = \frac{\lambda\,\beta}{\delta} \qquad z_1 = \frac{\mu\,\gamma}{\delta}.$$

Jede der Ebene (58) parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Ellipse, welche auf der einen Seite der Tangential-Ebene reell, auf der andern imaginär ist.

6. Jede Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids (27)

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 2\,\frac{x}{\delta} = 0 \tag{27}$$

wird dargestellt durch die Gleichung

$$x + \frac{\lambda}{\beta}\,y + \frac{\mu}{\gamma}\,z - \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2\,\delta} = 0. \tag{59}$$

Auch bei dieser Fläche sind also die Tangentialebenen nicht paarweise parallel. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2\,\delta} \qquad y_1 = \frac{\lambda\,\beta}{\delta} \qquad z_1 = -\frac{\mu\,\gamma}{\delta}.$$

Die Tangentialebene hat mit der Fläche ausser dem Berührungspunkte zwei Grade gemein, deren Gleichungen sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\lambda - \mu} + \frac{\lambda + \mu}{2\,\delta} &= -\frac{y}{\beta} + \frac{\lambda}{\delta} = \frac{z}{\gamma} + \frac{\mu}{\delta} \\ \frac{x}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda - \mu}{2\,\delta} &= -\frac{y}{\beta} + \frac{\lambda}{\delta} = -\frac{z}{\gamma} - \frac{\mu}{\delta} \end{aligned}\right\}. \tag{60}$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die erste der beiden Linien der Ebene $\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0$ parallel ist, die zweite der Ebene $\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0$. Die sämmtlichen Richtungen der beiden Systeme von Graden des Paraboloids (27) sind also in diesen beiden Ebenen enthalten. (Vgl. § 7 B. 2).

7. Aus § 8 3. ergiebt sich, dass jede Ebene, welche den graden Linien eines Cylinders parallel ist, als eine Berührungsebene des Cylinders angesehen werden muss. Der Berührungspunkt liegt im Allgemeinen in unendlicher Entfernung. Die Ebene hat im Allgemeinen zwei parallele Grade mit dem Cylinder gemein, welche reell und verschieden oder imaginär sein und im Grenzfalle zusammenfallen können. In diesem Grenzfalle nennt man die Ebene im engeren Sinne eine Tangentialebene des Cylinders. In diesem Sinne ist die Gleichung jeder Tangentialebene des elliptischen Cylinders (29)

$$\frac{\lambda}{\beta} y + \frac{\mu}{\gamma} z \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = 0, \tag{61}$$

und die Linien, längs deren die Berührung stattfindet, haben die Gleichungen

$$\frac{y}{\beta} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 0 \qquad \frac{z}{\gamma} \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 0$$

wo die Zeichen einander entsprechen.

In demselben engeren Sinne ist die Gleichung jeder Tangentialebene des hyperbolischen Cylinders (30)

$$\frac{\lambda}{\beta} y - \frac{\mu}{\gamma} z \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = 0 \tag{62}$$

und die Gleichungen der Berührungslinie

$$\frac{y}{\beta} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = 0 \qquad \frac{z}{\gamma} \mp \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = 0.$$

Ebenso ist für den parabolischen Cylinder, dessen Gleichung wir des Anschlusses an die letzten Entwicklungen wegen etwas anders wie unter (35) schreiben wollen, nämlich

$$\frac{y^2}{\beta^2} + 2\,\frac{z}{\delta} = 0$$

die Gleichung der Tangentialebene

$$y + \mu z - \frac{\beta^2}{2\,\mu\delta} = 0, \tag{63}$$

und die Gleichungen der Berührungslinie sind

$$y = \frac{\beta^2}{\mu\delta} \qquad z = -\frac{\beta^2}{2\,\mu^2\,\delta}.$$

§ 10. 1. Unter welcher Bedingung stellt die Gleichung (1) einen Kegel dar?

Die nothwendige und genügende Bedingung dafür, dass die Gleichung (1) einen Kegel darstelle, ist die, dass sie sich durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in eine homogene Gleichung zweiten Grades verwandeln lasse. (Vgl. § 7 A. II. 2). — Die Bedingung dafür ist die, dass sich drei Zahlen p, q, r so bestimmen lassen, dass

$$\begin{aligned} a_{11}\,p + a_{12}\,q + a_{13}\,r + a_{14} &= 0 \\ a_{21}\,p + a_{22}\,q + a_{23}\,r + a_{24} &= 0 \\ a_{31}\,p + a_{32}\,q + a_{33}\,r + a_{34} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$f(p, q, r) = 0.$$

Die letzte Gleichung geht unter Voraussetzung der drei ersten in die

$$a_{41}\,p + a_{42}\,q + a_{43}\,r + a_{44} = 0$$

über, und die Bedingung, dass diese mit den drei ersten zusammen bestehen könne, ist die, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{64}$$

2. Unter welchen Bedingungen stellt die Gleichung (1) ein System zweier Ebenen dar?

Diese Frage ist gleichbedeutend mit der: Unter welcher Bedingung ist die allgemeine Function zweiten Grades mit drei Variabeln in zwei lineare Factoren zerlegbar? Die Behandlung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn wir die homogene Function zweiten Grades mit vier Variabeln behandeln. Der Uebersicht wegen wollen wir die Bedingungen der Zerlegbarkeit für homogene Functionen zweiten Grades mit zwei und mit drei Variabeln voranstellen.

Die Function
$$a_{11}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 + 2a_{12}\,x_1\,x_2 \tag{65}$$
ist stets in zwei lineare Factoren zerlegbar; dieselben sind reell, wenn $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} > 0$ ist.

Die Function

$$a_{11}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 + a_{33}\,x_3^2 + 2a_{12}\,x_1\,x_2 + 2a_{13}\,x_1\,x_3 + 2a_{23}\,x_2\,x_3 \tag{66}$$

ist in zwei lineare Factoren zerlegt, wenn 6 Zahlen $\varkappa_1\;\varkappa_2\;\varkappa_3\;\lambda_1\;\lambda_2\;\lambda_3$ gefunden sind, so dass die Function (66) identisch gleich wird der Function

$$(\varkappa_1\,x_1 + \varkappa_2\,x_2 + \varkappa_3\,x_3)\;(\lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2 + \lambda_3\,x_3). \tag{67}$$

Zwei lineare Functionen, wie die beiden Factoren von (67) lassen sich im Allgemeinen durch die linearen Substitutionen

$$x_1 = x_1' + p_1\,x_3' \qquad x_2 = x_2' + p_2\,x_3' \qquad x_3 = x_3' \tag{68}$$

auf die Formen $\varkappa_1\,x_1' + \varkappa_2\,x_2'$ und $\lambda_1\,x_1 + \lambda_2\,x_2'$ zurückführen, indem man p_1 und p_2 so bestimmt, dass

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1\,p_1 + \varkappa_2\,p_2 + \varkappa_3 = 0 \\ \lambda_1\,p_1 + \lambda_2\,p_2 + \lambda_3 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Dies ist immer auf endliche und bestimmte Weise möglich, sobald nicht $\varkappa_1 : \lambda_1 = \varkappa_2 : \lambda_2$. Da die Function (67) in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogen ist, so folgt hieraus, dass mit Ausnahme des Falles, wo $\varkappa_1 : \lambda_1 = \varkappa_2 : \lambda_2 = \varkappa_3 : \lambda_3$ ist, wo also (67) das Quadrat einer linearen homogenen Function der drei Variabeln ist, sich diese Function stets in ein Product zweier linearen Functionen mit zwei Variabeln transformiren lässt

Wenn also die Function (66) nicht ein vollständiges Quadrat ist, d. h. wenn nicht gleichzeitig

$$a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = 0 \qquad a_{13}^2 - a_{11}\,a_{33} = 0 \qquad a_{23}^2 - a_{22}\,a_{33} = 0$$

ist, wo dann die Zerlegung von selbst ausgeführt ist, ist die Bedingung der Zerlegbarkeit keine andre wie die, dass sich die Function (66) durch Substitutionen von der Gattung wie die (68) auf zwei Variable zurückführen lässt. — Es sei insbesondere $a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} \gtrless 0$, was sich bei der Homogeneität der Function ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen lässt. Es ergibt sich als Bedingung der Zerlegbarkeit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{69}$$

und als Bedingung der Realität der Zerlegung die, dass $a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} > 0$ ist.

Durch ganz gleiche Schlüsse gelangt man zu der Bedingung der Zerlegbarkeit der homogenen Function

$$\begin{aligned} a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + a_{44}\, x_4^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + 2a_{13}\, x_1\, x_3 + 2a_{14}\, x_1\, x_4 + 2a_{23}\, x_2\, x_3 \\ + 2a_{24}\, x_2\, x_4 + 2a_{34}\, x_3\, x_4. \end{aligned} \tag{70}$$

Falls dieselbe nicht ein vollständiges Quadrat, falls also nicht gleichzeitig

$$\begin{gathered} a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} = 0 \quad a_{13}^2 - a_{11}\, a_{33} = 0 \quad a_{14}^2 - a_{11}\, a_{44} = 0 \quad a_{23}^2 - a_{22}\, a_{33} = 0 \\ a_{24}^2 - a_{22}\, a_{44} = 0 \quad a_{34}^2 - a_{33}\, a_{44} = 0 \end{gathered}$$

ist, in welchem Falle die Zerlegung von selbst ausgeführt ist, falls also inbesondere $a_{12}^2 - a_{11}\, a_{22} \gtrless$ ist, so wird die Function zerlegbar sein, wenn sie sich durch die Substitutionen

$$x_1 = x_1' + p_1\, x_4' \quad x_2 = x_2' + p_2\, x_4' \quad x_3 = x_3' + p_3\, x_4' \quad x_4 = x_4'$$

auf eine homogene Function der drei Variabeln x_1', x_2', x_3' zurückführen lässt und wenn diese Function zerlegbar ist. — Die erste Bedingung erfordert, dass p_1, p_2, p_3 so bestimmt werden, dass

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\, p_1 + a_{12}\, p_2 + a_{13}\, p_3 + a_{14} = 0 \\ a_{21}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + a_{23}\, p_3 + a_{24} = 0 \\ a_{31}\, p_1 + a_{32}\, p_2 + a_{33}\, p_3 + a_{34} = 0 \\ a_{41}\, p_1 + a_{42}\, p_2 + a_{43}\, p_3 + a_{44} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{71}$$

Damit das möglich sei muss

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \tag{72}$$

sein. Damit die dadurch erhaltene Function zerlegbar sei, muss

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{73}$$

sein. Damit die Gleichungen (71) endliche Werthe für p_1, p_2, p_3 ergeben, müssen die neun übrigen Unterdeterminanten dritter Ordnung der Determinante (72) einzeln Null sein. Die zehn letzten Bedingungen lassen sich im Allgemeinen auf zwei unter ihnen zurückführen.

Wenden wir die gewöhnliche Bezeichnung an, wonach diejenige Unterdeterminante dritter Ordnung der Determinante (72), welche in ihr mit a_{rs} multiplicirt ist, α_{rs} heisst, so schreibt sich die Bedingung (73)

$$\alpha_{44} = 0.$$

Die Bedingung (72) und (73) und die Bedingung $\alpha_{33} = 0$ haben die übrigen acht zur Folge. — Denn (s. Baltzer Determinanten 2. Aufl. § 6. 5), da vermöge der Bedingung (72)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{14} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0$$

so folgt aus den Bedingungen $\alpha_{33} = 0 \quad \alpha_{44} = 0$

$$\alpha_{13} = 0 \quad \alpha_{14} = 0 \quad \alpha_{23} = 0 \quad \alpha_{24} = 0 \quad \alpha_{34} = 0.$$

Ferner ist

$$a_{11}\,\alpha_{11} + a_{12}\,\alpha_{12} = 0$$
$$a_{12}\,\alpha_{12} + a_{22}\,\alpha_{22} = 0$$
$$\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0$$

Folglich

$$\alpha_{11} = -\frac{a_{12}\,\alpha_{12}}{a_{11}}$$

$$\alpha_{22} = -\frac{a_{12}\,\alpha_{12}}{a_{22}}$$

$$\alpha_{12}^2\left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}\,a_{22}} - 1\right) = 0$$

mithin

$$\alpha_{12} = 0.$$

Demnach ist vermöge der Gleichung $\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0$ jedenfalls eine der beiden Zahlen α_{11} und α_{22} Null; es sei $\alpha_{22} = 0$, so ergiebt sich $a_{11}\,\alpha_{11} = 0$ also mit Ausnahme des besonderen Falles, wo $a_{11} = 0$ ist, ist auch $\alpha_{11} = 0$. Die Bedingung der Realität der Zerlegung ist die, dass $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} > 0$ ist.

Setzt man von den Variabeln der Function (70) eine gleich der Einheit, die drei andern gleich x, y, z, so gelangt man zu einer Function von der Form (1) und demnach stellt die Gleichung (1) ein System zweier reellen Ebenen dar, wenn die Bedingung (72) (vgl. 64) erfüllt ist, wenn ihre Unterdeterminanten dritter Ordnung einzeln Null sind, welche letzteren zehn Bedingungen sich im Allgemeinen auf zwei zurückführen lassen, und wenn $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} > 0$ oder $a_{11}\,a_{33} - a_{33}^2 > 0$ ist oder eine der vier übrigen analog gebildeten Bedingungen erfüllt ist.

Die weitere Ausführung der Grenzfälle unterlassen wir hier, weil sie für unsere Zwecke nicht erforderlich ist.

§ 11. Die Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades.

In § 7 sind schon einige kreisförmige Schnitte von Flächen zweiter Ordnung erwähnt worden. Es sollen hier allgemein die Bedingungen erörtert werden, unter welchen ebene Schnitte von Flächen zweiter Ordnung Kreise sind. — Es soll dabei zunächst der Fall der Umdrehungsflächen ausgeschlossen sein, um am Schlusse erledigt zu werden.

Wenn eine Fläche zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten wird, so lässt sich durch diesen Kreis eine Kugel legen. Bezeichnet man die Gleichung der Fläche mit $U = 0$ und die der Kugel mit $U_1 = 0$, so stellt $\lambda U + U_1 = 0$ jede Fläche zweiten Grades dar, welche alle die beiden gegebenen Flächen gemeinsamen Punkte enthält. Es kann also λ auch so bestimmt werden, dass $\lambda U + U_1 = 0$ eine Fläche darstellt, von welcher die Kreisebene ein Theil ist, d. h. dass sie ein System zweier Ebenen darstellt. Durch diese Erwägung soll die vorliegende Frage gelöst werden.

1. Es sei die Gleichung eines Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichung der Kugel ist, da wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - r^2 = 0.$$

Folglich ist die Gleichung der Fläche zweiten Grades, welche die beiden Flächen gemeinsamen Punkte enthält

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + 1\right) x^2 + \left(\frac{\lambda}{\beta^2} + 1\right) y^2 + \left(\frac{\lambda}{\gamma^2} + 1\right) z^2 - 2x_1 x - 2y_1 y - 2z_1 z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (\lambda^2 + r^2) = 0. \tag{74}$$

Die Function auf der linken Seite ist kein vollständiges Quadrat. Wenden wir auf diese Gleichung die bisherige Bezeichnung an, um die Bedingungen dafür zu ermitteln, dass sie ein System zweier Ebenen darstellt, so hat die Bedingung $\alpha_{44} = 0$ hier die Form

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + 1\right)\left(\frac{\lambda}{\beta^2} + 1\right)\left(\frac{\lambda}{\gamma^2} + 1\right) = 0.$$

Da α, β, γ von einander verschieden sind, so kann nur einer der drei Factoren Null sein; es sei $\lambda = -\beta^2$. — Die Bedingung $\alpha_{24} = 0$ heisst hier

$$y_1 (\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2) = 0$$

und ergibt $y_1 = 0$. Dadurch ist die Bedingung (72) erfüllt. Die Bedingung $\alpha_{22} = 0$ ergibt dann

$$r^2 = \beta^2 \left\{ -\frac{x_1^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2 - \beta^2} + 1 \right\}. \tag{75}$$

Hiermit sind alle Bedingungen der Zerlegbarkeit erfüllt. Durch Substitution der gefundenen Werthe in die Gleichung (74) nimmt dieselbe folgende Gestalt an

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} x^2 + \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2} z^2 - 2x_1 x - 2z_1 z + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} x_1^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \beta^2} z_1^2 = 0.$$

Die Bedingung der Realität der Zerlegung der Function links ist, dass

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2) < 0$$

ist, d. h. dass β der Grösse nach zwischen α und γ liegt; wir bezeichnen demnach wieder wie früher mit α die grösste, mit γ die kleinste Halbaxe. Durch Zerlegung erhalten wir die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\cdot x+\frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}z-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}x_1+\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}z_1\right)$$
$$\times\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}x-\frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}z-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}x_1-\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}z_1\right)=0. \qquad (76)$$

Es gibt demnach zwei Systeme von unendlich vielen Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; die Ebenen des einen Systems sind einander parallel, ebenso die Ebenen des andern Systems; die Ebenen beider Systeme stehen auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe senkrecht; sie sind also alle der mittlern Axe parallel; je zwei Ebenen, welche verschiedenen Systemen angehören, bilden sowohl mit der längsten wie mit der kürzesten Axe gleiche Winkel.

Die Ebenen, welche in der Gleichung (76) enthalten sind, sind sämmtlich reell, wie auch x_1, z_1, d. h. wo auch der Mittelpunkt der Kugel gewählt werden möge, aber sie schneiden nicht immer das Ellipsoid in reellen Kreisen. Zunächst ergibt die Gleichung (75), dass die Kugel nur dann reell ist, wenn

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{z_1^2}{\gamma^2-\beta^2}-1<0$$

d. h. wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konvexen Seite der Hyperbel

$$\frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2-\beta^2}-1=0 \qquad (77)$$

liegt. Diese Hyperbel ist der Ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}-1=0$$

d. h. dem Schnitte der XZ-Ebene mit dem Ellipsoid confocal und schneidet dieselbe in den Punkten

$$x=\pm\alpha\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}} \qquad z=\pm\gamma\sqrt{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}}.$$

Für jeden Punkt der Hyperbel, insbesondere für die eben bezeichneten vier Punkte, welche man Nabelpunkte des Ellipsoids nennt, ist der Radius der Kugel Null; in den vier Punkten selbst ist jedesmal eine der Ebenen (76) Berührungsebene. Aber auch wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konvexen Seite der Hyperbel (77) gewählt wird, hat die Kugel deshalb noch nicht einen reellen Kreis mit dem Ellipsoid gemein. — Damit die durch den ersten Factor der Gleichung (76) gegebene Ebene das Ellipsoid treffe, muss, vermöge der Gleichung (61) der Punkte x_1, z_1 innerhalb des durch die Doppelgleichung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}x-\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}z=\pm\sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \qquad (78)$$

in der XZ-Ebene gegebenen Parallelstreifens liegen; diese beiden Graden berühren die Hyperbel in zwei diametral entgegengesetzten Nabelpunkten und stehen auf der einen Gruppe der Ebenen (76) senkrecht. Ebenso, damit die durch den zweiten Factor der Gleichung (76) gegebene Ebene das Ellipsoid treffe, muss der Punkt x_1, z_1 innerhalb des durch die Doppelgleichung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\, x + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\, z = \pm \sqrt{\alpha^2-\gamma^2} \tag{79}$$

gegebenen Parallelstreifens liegen. Diese beiden Graden berühren die Hyperbel (77) in den beiden andern Nabelpunkten, und stehen auf der zweiten Gruppe der Ebenen (76) senkrecht. Die Linien (78) und (79) umschliessen einen Rhombus, dessen Eckpunkte in der grössten und kleinsten Axe liegen. — Wählt man den Punkt x_1, z_1 im Innern dieses Rhombus, so schneidet die Kugel das Ellipsoid in zwei reellen Kreisen; wählt man ihn in einem der Eckpunkte, so berührt die Kugel das Ellipsoid in zwei Nabelpunkten; wählt man ihn ausserhab des Rhombus aber auf der konvexen Seite der Hyperbel (77), so wird einer der beiden Kreise oder werden beide imaginär; eine der beiden Ebenen (77) oder beide treten dann zu der Kugel und dem Ellypsoid in dieselbe Beziehung, welche schon in den Elementen in der Ebene gleicher Potenzen (Chordalebene) zweier Kugeln oder in der Linie gleicher Potenzen (Chordallinie) zweier Kreise vorkommt. Wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konkaven Seite der Hyperbel gewählt wird, so erscheinen die Ebenen (76) als Träger der gemeinsamen (imaginären) Punkte eines Ellipsoids und einer imaginären Kugel.

Je zwei Kreisschnitte der beiden verschiedenen Systeme liegen auf einer und derselben Kugel.

Wenn man von der Beziehung der Kreisschnitte zu der Kugel absehen will, so kann man die Gleichungen der Ebenen (76) kürzer schreiben

$$\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\, x + \frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma} \,.\, z + p = 0$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\, x - \frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma} \,.\, z + q = 0.$$

Diese Ebenen schneiden das Ellipsoid in reellen Kreisen, sofern p^2 resp. $q^2 < \alpha^2 - \gamma^2$.

2. Für das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

ergibt sich auf gleichem Wege Folgendes. Unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \beta$ schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der *XZ*-Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{x_1^{\,2}}{\beta^2-\alpha^2} + \frac{z_1^{\,2}}{\beta^2+\gamma^2} + 1 \right\}$$

bestimmt ist, in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen folgende Gleichungen haben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha} \,.\, x + \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma}\, z + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\, x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}\, z_1 = 0 \\ \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\, x - \frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma}\, z + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\, x_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}} \,.\, z_1 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{80}$$

Diese Gleichungen kann man abgekürzt schreiben

$$\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\,x+\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma}\,z+p=0 \qquad \frac{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\alpha}\,x-\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\gamma}\,z+q=0 \quad (81)$$

wo p und q alle Werthe annehmen können.

3. Für das zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}+1=0$$

ergibt sich ebenso: Wenn $\alpha<\beta$ ist, so schneidet im Allgemeinen eine Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ-Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r'^2=\beta^2\left\{\frac{x_1{}^2}{\beta^2-\alpha^2}+\frac{z_1{}^2}{\beta^2+\gamma^2}-1\right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen (80) haben. Wenn der Punkt x_1, z_1 ausserhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{\beta^2-\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2+\gamma^2}-1=0 \qquad (82)$$

liegt, welche der in der XZ-Ebene liegenden Hyperbel confocal ist und dieselbe in den Punkten

$$x=\pm\alpha\sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2+\gamma^2}} \qquad z=\pm\gamma\sqrt{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}} \qquad (83)$$

schneidet, so ist die Kugel reell. Wenn derselbe Punkt ausserhalb der beiden Parallelstreifen liegt, die von den Linien gebildet werden, welche die Ellipse (82) in den Punkten (83) berühren und auf den Ebenen (80) senkrecht stehen, so schneidet die Kugel das Hyperboloid in zwei reellen Kreisen. — Die Ebenen (81) schneiden das zweischalige Hyperboloid in reellen Kreisen, wenn p^2 resp. $q^2>\alpha^2+\gamma^2$ ist.

4. Wenn in dem Kegel

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0$$

$\alpha<\beta$ ist, so schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ-Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2=\beta^2\left\{\frac{x_1{}^2}{\beta^2-\alpha^2}+\frac{z_1{}^2}{\beta^2+\gamma^2}\right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen (80) haben; schreibt man diese Gleichungen in der Form (81), so sind p und q keinen Grenzbedingungen unterworfen.

5. Wenn in dem elliptischen Paraboloid

$$\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}+2\,\frac{x}{\delta}=0$$

$\beta^2 > \gamma^2$ ist, so schneidet im Allgemeinen eine Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ-Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{z_1{}^2}{\beta^2 - \gamma^2} - 2\,\frac{x_1}{\delta} - \frac{\beta^2}{\delta^2} \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei Kreisen deren Ebenen folgende Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} x + \dfrac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}\, z - \left(\dfrac{\beta^2}{\delta} + x_1\right) + \dfrac{\gamma z_1}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}} = 0 \\ x - \dfrac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}\, z - \left(\dfrac{\beta^2}{\delta} + x_1\right) - \dfrac{\gamma z_1}{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}} = 0 \end{array}\right\}. \tag{84}$$

Wenn der Punkt x_1, z_1 ausserhalb (auf der convexen Seite) der Parabel

$$\frac{z^2}{\beta^2-\gamma^2} - 2\,\frac{x}{\delta} - \frac{\beta^2}{\delta^2} = 0 \tag{85}$$

liegt, welche der in der XZ-Ebene liegenden Parabel confocal ist und dieselbe in den Punkten

$$x = -\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\delta} \qquad z = \pm\frac{\gamma}{\delta}\sqrt{\beta^2-\gamma^2} \tag{86}$$

schneidet, so ist die Kugel reell; darüber, ob die Schnitte der reellen Kugel und des Paraboloids reell sind, entscheiden die beiden Linien, welche die Parabel in den Punkten (86) berühren und auf den Ebenen (84) senkrecht stehen. Liegt der Punkt x_1, z_1 in demjenigen Winkel dieser beiden Linien in welchem die Parabel (85) liegt, so ist keiner der beiden Kreise reell, liegt er im Scheitelwinkel, so sind beide Kreise reell; liegt er im Nebenwinkel, so ist einer der beiden Kreise reell, der andre imaginär.

Schreibt man die Gleichungen (84) abgekürzt

$$x + \frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}\, z + \delta p = 0 \qquad x - \frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\gamma}\, z + \delta q = 0$$

so werden die Ebenen mit dem Paraboloid reelle Kreise gemein haben, wenn p resp. $q > \dfrac{\beta^2-\gamma^2}{2\delta^2}$ ist.

Das hyperbolische Paraboloid hat keine Kreisschnitte.

6. Wenn in dem elliptischen Cylinder

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

$\beta^2 > \gamma^2$ ist, so schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ-Ebene liegt, deren Mittelpunkt die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{z_1{}^2}{\beta^2-\gamma^2} + 1 \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen

$$x - \frac{\sqrt{\beta^2 - y^2}}{\gamma} z - x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 = 0$$

$$x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - x_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 = 0$$

haben.

Schreibt man die Gleichungen abkürzend

$$x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + p = 0 \qquad x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + q = 0$$

so sind p und q keinen Grenzbedingungen unterworfen.

Der hyperbolische und der parabolische Cylinder haben keine Kreisschnitte.

7. In allen Revolutionsflächen mit Ausnahme der Kugel gibt es nur ein System von Kreisschnitten, deren Ebenen sämmtlich parallel sind und die alle auf der Rotaxionsaxe senkrecht stehen. Die Mittelpunkte der Kugeln, welche die Fläche in Kreisflächen schneiden, liegen alle in der Rotaxionsaxe; ihr Radius ist unbestimmt. — Die Kugel wird von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten.

Die vorstehende Abhandlung gibt im Wesentlichen den Gang, nach welchem ich seit mehreren Jahren in der Ober-Prima unsrer Anstalt die Flächen zweiter Ordnung behandelt habe. — In unserem Unterrichte in der analytischen Geometrie handelt es sich darum, dass der Schüler sich innerhalb gewisser, immerhin enger Grenzen Verständnis der analytischen Methoden und eine gewisse Fertigkeit in ihrer Anwendung aneigne, dass er zugleich lebendige und fruchtbare geometrische Anschauungen gewinne und die geometrischen Beziehungen mit Leichtigkeit in den Gleichungen erkennen lerne. — Für diesen Zweck sind die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes besonders wichtig, die Anfangsgründe der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung besonders fruchtbar. — Der Masstab dafür, wie weit darin zu gehen ist, wird dadurch gegeben, dass die Schüler unsrer obersten Klassen befähigt werden sollen, ihre Studien auf den polytechnischen Hochschulen mit Erfolg fortzusetzen und zu vollenden. — Dazu ist, wenn diejenigen Ziele, welche der Verein deutscher Ingenieure in seiner trefflichen Denkschrift: „Principien der Organisation polytechnischer Schulen“ aufgestellt hat, wirklich erreicht werden sollen, unerlässlich, dass die Schüler eine gründliche und umfassende allgemeine Bildung und für den ihren Fachstudien zunächst liegenden Wissenschaftskreis eine so tiefgehende specielle Vorbereitung erhalten, dass sie selbstständig wissenschaftlich arbeiten können und im Stande sind, insbesondere die Mathematik als die Sprache und das stets bereite Werkzeug der technischen und Naturwissenschaften handhaben zu lernen. — Wie unsere Anstalt beiden Aufgaben der Vorbereitung für die höheren technischen Studien, welche meines Erachtens in § 2 der oben genannten Denkschrift nicht hinreichend betont sind, gerecht zu werden sucht, geht im Allgemeinen aus den Schulnachrichten hervor. Die vorstehende Abhandlung hat diesem Bilde nach einer Seite schärfer ausgeprägte Züge geben wollen, wie es in dem vorletzten Programm nach Seite der Chemie geschehen ist und demnächst hoffentlich auch nach anderen Seiten geschehen wird.

Gallenkamp.