Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

1) Über die imaginären Zahlen und deren Einheiten im allgemeinen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

lich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, bezw. der Potenzen und Wurzeln erworben werden können.

1) Ueber die imaginären Zahlen und deren Einheiten im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter imaginären Zahlen im engeren Sinne, was im weiteren Sinne, und auf welche Weise werden solche Zahlen dargestellt?

Antwort. Zahlen (und nur solche), die in die zweite Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im engeren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a \quad \text{(siehe Erkl. 5)}$$

Zahlen (und nur solche), die in eine gerade (z. B. $n$te) Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im weiteren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt[n]{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt[n]{-a})^n = -a$$

Erkl. 1. Das Wort „imaginär“ stammt von dem lateinischen Worte imago (Bild) und bedeutet: „nur in der Einbildung beruhend“ oder auch „unmöglich“. — Es wurde zuerst von Descartes (Géom. III) als Prädikat der Wurzeln von Gleichungen angewendet.

Erkl. 2. Das Wort „Symbol“ (griech.) bedeutet: „Zeichen“ oder „Sinnbild“.

Erkl. 3. Das Wort „Kriterium“ (griech.) bedeutet: „Kennzeichen“.

Erkl. 4. Die Definition (Erklärung) der Wurzelausziehung ist im Folgenden gegeben:

„Aus einer Zahl a die $n$te Wurzel ausziehen, heisst, eine dritte Zahl b bilden, welche zur $n$ten Potenz erhoben die Zahl a hervorbringt.“

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

wenn:

$$b^n = a \text{ ist.}$$

Erkl. 5. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Potenziert man eine Wurzel auf den Grad ihres Wurzelexponenten, so hebt sich die Wurzel gegen die Potenz und man erhält den Radikandus.“

In Zeichen:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Z. B.:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = +25$$

denn:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = (\pm 5)^2 = +25$$

Erkl. 6. Die imaginäre Zahl im engeren Sinne $(\sqrt{-a})$ wird auch „imaginäre Quadratwurzel“ genannt.

Erkl. 7. Aus der Definition der Wurzel (siehe Erkl. 4) ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist biform (siehe Erkl. 7a), nämlich positiv und negativ, denn nicht nur die positive, sondern auch die negative Zahl gibt zu einer geraden Potenz erhoben ein positives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt{+36} = +6$ und $= -6$, weil sowohl $(+6)^2$ als auch $(-6)^2$ den Radikandus $+36$ hervorbringt.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n]{+(a^{2n})} = +a \text{ und } = -a$$

2) Jede ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist nur eindeutig, nämlich nur negativ, denn nur eine negative Zahl gibt zu einer ungeraden Potenz erhoben ein negatives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt[3]{-125} = -5$, weil nur $(-5)^3 = -125$ ist.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n+1]{-(a^{2n+1})} = -a$$

3) Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl gibt weder eine positive noch eine negative Zahl. — So ist z. B. $\sqrt[2]{-81}$ weder $+9$ noch -9, weil $(+9)^2$ und $(-9)^2$ nicht $= -81$ sind. Ueberhaupt gibt es in dem ganzen Gebiete der sogenannten reellen Zahlen (siehe Erkl. 11) keine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ist. Die Unmöglichkeit, unter den reellen Zahlen eine zu finden, welche z. B. $\sqrt[2]{-81}$ vollständig entspricht, führte auf die in der Antwort auf Frage 1 gegebene Definition der imaginären Zahlen.

Erkl. 7a. Das Wort „biform“ (auch „biformis“) stammt vom Lateinischen bis (zweimal) und forma (die Gestalt) und bedeutet also „zweigestaltig“ oder „doppeldeutig“.

Frage 2. Was versteht man unter den Einheiten der imaginären Zahlen und auf welche Weise gelangt man zu denselben?

Erkl. 8. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird radiziert, indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliziert.“

In Zeichen:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Umgekehrt ist:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Antwort. Unter den imaginären Einheiten versteht man die Symbole:

$$+\sqrt[2]{-1} \text{ und } -\sqrt[2]{-1}$$

Man gelangt zu denselben mit Hilfe der in den Erkl. 8 und 9 aufgeführten Sätze, indem man eine, allgemein durch $\sqrt[2n]{-a}$ dargestellte, imaginäre Zahl umformt, wie folgt:

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{-a}} \text{ (nach Erkl. 8)}$$

Erkl. 9. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden einzelnen Faktor radiziert."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Erkl. 10. Bei einer durch $\sqrt[2]{-a}$ dargestellten imaginären Zahl hat man stets zu unterscheiden, ob $+\sqrt[2]{-a}$ oder $-\sqrt[2]{-a}$ gemeint ist, ob sie also positiv oder negativ sein soll.

Erkl. 11. Die Einführung der imaginären Zahlen führte zur Bezeichnung aller übrigen Zahlen als reelle (oder auch reale, wirkliche). Man versteht also unter reellen Zahlen alle die durch Multiplikation und Division aus $+1$ und -1 abgeleiteten Zahlen. Die Reihe der reellen Zahlen und die der imaginären haben nur die Null gemeinschaftlich.

Erkl. 12. Das Wort „absolut" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „abgelöst". In der Mathematik ist die absolute Zahl eine Zahl ohne Rücksicht auf das sie begleitende Zeichen. Die Zahlen $+5$, -5, $+5i$, $-5i$ haben sämtlich den absoluten Wert 5.

Erkl. 13. Lässt sich eine Wurzel durch eine ganze Zahl oder durch einen Bruch genau ausdrücken, so heisst sie rational, andernfalls irrational. Die Irrationalzahl ist demnach eine Zahl, welche sich nicht mehr als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt.

Erkl. 14. Das ganze Zahlengebiet zerfällt in:

1) reelle Zahlen;
   a) rationale Zahlen;
      α) ganze Zahlen;
      β) gebrochene Zahlen;
   b) irrationale Zahlen;
2) imaginäre Zahlen.

Letztere sind an sich weder rational, noch irrational, sie können aber, wie die reellen Zahlen, positiv oder negativ sein.

Frage 3. Welche kürzere Bezeichnung ist für die Symbole $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ in die Wissenschaft eingeführt worden?

und

$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \cdot (-1)} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$$

(nach Erkl. 9)

Da nun $\sqrt[2]{a}$ eine reelle Zahl (siehe Erkl. 11) ist — aus welchem Grunde auch in dem Ausdrucke $\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$ der Faktor $\sqrt[2]{a}$ „reeller Faktor" genannt wird — und diese reelle Zahl sowohl positiv als auch negativ ist, so erhält man:

$$\sqrt[2]{-a} = +r \cdot \sqrt[2]{-1} \text{ bezw. } = -r \cdot \sqrt[2]{-1}$$

oder:

$$\sqrt[2]{-a} = r \cdot (+\sqrt[2]{-1}) \text{ bezw. } = r \cdot (-\sqrt[2]{-1})$$

wenn der aus dem reellen Faktor resultierende absolute Wert mit r bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich der Satz:

„Jede imaginäre Zahl ist gleich einem Produkte aus einem reellen und einem imaginären Faktor."

Der reelle Faktor stellt eine rationale oder eine irrationale Zahl (siehe Erkl. 13) dar, der imaginäre Faktor die imaginäre Einheit (siehe die Aufgaben 1 bis 4).

Antwort. Die imaginäre Einheit $\pm\sqrt{-1}$ wird nach Gauss (Disquisitiones arithmeticae, Sect. VII, Art. 337) mit dem ersten Buchstaben des Wortes „imaginär" bezeichnet.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Man schreibt also für:

$$\pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\cdot i = \pm a\cdot i$$

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man scheide aus $\sqrt[2]{-25}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung. Man erhält (nach Antwort auf Frage 2):

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25\cdot(-1)} = \sqrt[2]{25}\cdot\sqrt[2]{-1} = \pm 5i$$

Der reelle Faktor dieser imaginären Zahl gibt demnach eine rationale Zahl (siehe Erkl. 13).

Aufgabe 2. Man stelle $\sqrt[2]{-6}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung. Nach der Antwort auf die Frage 2 erhält man:

$$\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6\cdot(-1)} = \sqrt[2]{6}\cdot\sqrt[2]{-1}$$
$$= \pm 2{,}44949\cdots i$$

Der reelle Faktor gibt also hier eine Irrationalzahl (siehe Erkl. 13).

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 3. Man scheide aus $\sqrt[2]{-121}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Man stelle $\sqrt[2]{-5}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 2.

2) Ueber die imaginären Einheiten im besonderen.

Frage 4. Welche Beziehungen bestehen zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit, und auf welche Weise lässt sich die Richtigkeit der Behauptungen darthun?

Antwort. Zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit bestehen folgende Beziehungen:

a) $-i = \frac{1}{+i}$