Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

2) Über die imaginären Einheiten im besonderen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Man schreibt also für:

$$\pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\cdot i = \pm a\cdot i$$

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man scheide aus $\sqrt[2]{-25}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung. Man erhält (nach Antwort auf Frage 2):

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25\cdot(-1)} = \sqrt[2]{25}\cdot\sqrt[2]{-1} = \pm 5i$$

Der reelle Faktor dieser imaginären Zahl gibt demnach eine rationale Zahl (siehe Erkl. 13).

Aufgabe 2. Man stelle $\sqrt[2]{-6}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung. Nach der Antwort auf die Frage 2 erhält man:

$$\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6\cdot(-1)} = \sqrt[2]{6}\cdot\sqrt[2]{-1}$$
$$= \pm 2{,}44949\cdots i$$

Der reelle Faktor gibt also hier eine Irrationalzahl (siehe Erkl. 13).

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 3. Man scheide aus $\sqrt[2]{-121}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Man stelle $\sqrt[2]{-5}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 2.

2) Ueber die imaginären Einheiten im besonderen.

Frage 4. Welche Beziehungen bestehen zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit, und auf welche Weise lässt sich die Richtigkeit der Behauptungen darthun?

Antwort. Zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit bestehen folgende Beziehungen:

a) $-i = \frac{1}{+i}$

Erkl. 15. Zwei Zahlen heissen „reciprok", wenn ihr Produkt $= 1$ ist. Es ist z. B. a das Reciproke von $\frac{1}{a}$, weil $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist.

Das Wort „reciprok" (lat.) bedeutet „gegenseitig", „wechselseitig", auch „umgekehrt".

Erkl. 16. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man mit beiden Seiten derselben die gleiche Rechnung vornimmt, z. B. beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert, beide Seiten zur gleichen Potenz erhebt, aus beiden Seiten die gleiche Wurzel zieht."

Erkl. 17. Wird ein Bruch mit seinem Nenner multipliziert, so erhält man seinen Zähler.

Erkl. 18. Der Bruch zweier Zahlen ist negativ, wenn Zähler und Nenner ungleiche Vorzeichen haben.

Erkl. 18 a. Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen geben ein positives, mit ungleichen ein negatives Produkt.

in Worten:

„Die negative imaginäre Einheit ist gleich dem Reciproken (siehe Erkl. 15) der positiven."

Beweis. Setzt man in die Gleichung:

$$-i = \frac{1}{+i}$$

für i eine andere Buchstabengrösse, z. B. x ein, so erhält man:

$$-x = \frac{1}{+x}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $(+x)$, so folgt:

$$(-x)\cdot(+x) = \left(\frac{1}{+x}\right)\cdot(+x) \quad \text{(s. Erkl. 16)}$$

oder:

$$-x^2 = +1 \quad \text{(siehe Erkl. 17 u. 18a)}$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit (-1), so erhält man:

$$(-x^2)\cdot(-1) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

$$+x^2 = -1$$

Zieht man schliesslich noch aus beiden Seiten der letzten Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich:

$$\sqrt{+x^2} = \sqrt{-1}$$

d. i.:

$$x = i$$

Es gibt also keine andere Zahl als i, welche die behauptete Eigentümlichkeit besitzt.

---

b) $(+i)\cdot(-i) = +1$

in Worten:

„Das Produkt aus der positiven und der negativen imaginären Einheit ist gleich $+1$."

Beweis. Es ist:

$$(+i)\cdot(-i) = (+i)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right)$$

[nach Teil a) dieser Antwort]

oder:

$$(+i)\cdot(-i) = +1 \quad \text{(nach Erkl. 17)}$$

---

c) $(+i)^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1$

in Worten:

„Das Quadrat der imaginären Einheit, sowohl der positiven als auch der negativen, ist gleich -1."

Beweis. Es war:

$$+i = +\sqrt{-1} \text{ und } -i = -\sqrt{-1}$$

(siehe Antwort auf Frage 3)

Man erhält demnach:

$$(+i)^2 = (+\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$
$$(-i)^2 = (-\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$

(siehe Erkl. 18a und 7,1)

oder:

$$(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = \frac{1}{+i}\cdot\frac{1}{+i}$$
$$[\text{nach Teil a)}] = \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1}$$
$$(\text{nach vorstehend. Beweis}) = -1 \quad (\text{s. Erkl. 18})$$

Erkl. 19. Jede Grösse, durch sie selbst geteilt, gibt $+1$.

Erkl. 20. Ist das Produkt zweier Faktoren gleich dem zweier anderen, so bilden die Faktoren des einen Produktes die äusseren, die des anderen die inneren Glieder einer Proportion.

Hieraus ergibt sich, wenn man die Zahl -1 von der rechten Seite der Gleichung auf die linke nimmt:

d) $(\pm i)^2 + 1 = 0$

in Worten:

„Das Quadrat der positiven und der negativen imaginären Einheit, vermehrt um $+1$, gibt Null."

Erkl. 20 a. Ein Satz aus der Proportionenlehre lautet:

„In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren."

Und aus derselben Gleichung:

$$(\pm i)^2 = -1$$

folgt noch weiter:

$$(+i)\cdot(+i) = (+1)\cdot(-1)$$

und

$$(-i)\cdot(-i) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

e) $\begin{cases} (+1):(+i) = (+i):(-1) \\ (+1):(-i) = (-i):(-1) \end{cases}$

(nach Erkl. 20)

in Worten:

„Die imaginäre Einheit (sowohl die positive, als auch die negative) ist die mittlere Proportionale von $+1$ und -1." (Siehe Erkl. 21.)

Erkl. 21. Sind die inneren Glieder (das zweite und dritte Glied) einer Proportion gleich, so nennt man letztere stetig und jedes der beiden inneren Glieder die mittlere Proportionale.

Frage 5. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Einheit berechnen und welche Beziehungen finden zwischen diesen Potenzen statt?

Antwort. Bezeichnet n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null), so findet statt:

1) $i^{4n} = +1$
2) $i^{4n+1} = +i$
3) $i^{4n+2} = -1$
4) $i^{4n+3} = -i$

Die Richtigkeit vorstehender Formeln lässt sich am einfachsten durch direkte Berechnung der ersten Potenzen von i nachweisen.

Erkl. 22. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Die nullte Potenz einer jeden Zahl ist gleich $+1$, die erste Potenz die Zahl selbst."

In Zeichen:

$$(\pm a)^0 = +1$$
$$(+a)^1 = +a; \qquad (-a)^1 = -a$$

Erkl. 23. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Summe darstellt, ist gleich dem Produkte von Potenzen, deren Grundzahlen gleich der Basis der gegebenen Potenz und deren Exponenten gleich den Summanden des gegebenen Exponenten sind."

In Zeichen:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert."

Erkl. 24. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Differenz darstellt, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Minuendus des gegebenen Exponenten als Exponenten, und dessen Nenner eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Subtrahendus des gegebenen Exponenten als Exponenten."

In Zeichen:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahiert."

Wird $m = n$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{n-n} = a^0$$

Es ist also:

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = +1 \quad \text{(vgl. Erkl. 22)}$$

Für die Pluspotenzen (s. Erkl. 24) erhält man:

a) wenn $n = 0$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot 0} = i^0 = +1 \quad \text{(siehe Erkl. 22 u. 24)}$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot 0+1} = i^1 = i \quad \text{(siehe Erkl. 22)}$$
$$i^{4n+2} = i^{4\cdot 0+2} = i^2 = -1$$
[nach Antwort c) auf Frage 4]
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot 0+3} = i^3 = i^1 \cdot i^2 \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= i\cdot(-1) = -i$$

b) wenn $n = 1$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot 1} = i^4 = i^2 \cdot i^2 \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= (-1)\cdot(-1) = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4+1} = i^5 = i^2 \cdot i^3$$
$$= (-1)\cdot(-i) = +i$$
$$i^{4n+2} = i^{4+2} = i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)\cdot(-i)$$
$$= \left(\frac{1}{+i}\right)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right) \quad \text{[nach Antwort a) auf Frage 4]}$$
$$= \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4+3} = i^7 = i^3 \cdot i^4$$
$$= (-i)\cdot(+1) = -i$$
und so fort.

Für die Minuspotenzen (s. Erkl. 24) ergibt sich:

a) wenn $n = -1$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot(-1)} = i^{-4} = \frac{1}{i^4} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$
$$= \frac{1}{+1} = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-1)+1} = i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}$$
$$= -\frac{1}{i} \quad \text{(siehe Erkl. 18)} = -(-i)$$
[nach Antwort a) auf Frage 4] $= +i$
$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-1)+2} = i^{-2}$$
$$= \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-1)+3} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

b) wenn $n = -2$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot(-2)} = i^{-8} = \frac{1}{i^8} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$
$$= \frac{1}{i^4}\cdot\frac{1}{i^4} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= \frac{1}{(+1)}\cdot\frac{1}{(+1)} = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-2)+1} = i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i}$$
$$= -\frac{1}{i} = -(-i) = +i$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Wird $m = 0$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Es ist also:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

In Worten:

„Die Minuspotenz (d. h. die Potenz mit negativem Exponenten) ist das Umgekehrte der Pluspotenz (d. h. der Potenz mit positivem Exponenten).

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-2)+2} = i^{-6}$$
$$= \frac{1}{i^6} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-2)+3} = i^{-5}$$
$$= \frac{1}{i^5} = \frac{1}{+i} = -i$$

und so fort.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

„Die Potenzen der imaginären Einheit — sowohl die mit positiven, als auch die mit negativen Exponenten — kehren stets weder."

Die Periode ist:

$$+1; \quad +i; \quad -1; \quad -i$$

Andere Werte, als die vorstehenden, können sich bei keiner Potenz von i ergeben.

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 5. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

a) $(\sqrt{-1})^{24}$

b) i^{89}

c) $(-\sqrt{-1})^{126}$

Auflösungen.

a) Der Exponent 24 lässt sich durch 4 ohne Rest teilen, denn $24 = 4\cdot 6$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{24} = i^{4\cdot 6}$$

oder allgemein:

$$= i^{4\cdot n}$$

Nach Formel 1) (Frage 5) ist:

$$i^{4n} = +1$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-1})^{24} = +1$$

b) Der Exponent 89 gibt, durch 4 geteilt, den Quotient 22 und den Rest $+1$. Man erhält demnach für:

$$i^{89} = i^{4\cdot 22+1}$$

oder allgemein:

$$= i^{4n+1}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{89} = +i$$

c) Der Exponent 126, durch 4 geteilt, gibt den Quotient 31 und den Rest $+2$. Man kann also schreiben für:

$$(-\sqrt{-1})^{126} = (-\sqrt{-1})^{4\cdot 31+2}$$

oder allgemein:

$$(-i)^{126} = (-i)^{4n+2}$$

Nach Formel 3) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+2} = -1$$

folglich ist:

$$(-i)^{126} = -1$$

Erkl. 25. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ."

denn das Resultat ändert sich nicht, wenn i negativ ist, weil der Potenzexponent eine gerade Zahl ist (siehe Erkl. 25).

---

d) $(-i)^{163}$

d) Der Exponent 163 lässt sich zerlegen in: $4 \cdot 40 + 3$. Folglich ist:

$$(-i)^{163} = (-i)^{4 \cdot 40 + 3}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{4n+3}$$

Nach Formel 4) (Frage 5) gibt:

$$i^{4n+3} = -i$$

Da die Grundzahl der gegebenen Potenz negativ und der Exponent eine ungerade Zahl ist, so erhält man (nach Erkl. 25) für:

$$(-i)^{163} = -(-i) = +i$$

---

e) $(\sqrt{-1})^{-20}$

e) Der Exponent -20 lässt sich zerlegen in: $-4 \cdot 5$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = i^{-4 \cdot 5}$$

oder allgemein:

$$= i^{-4n}$$

Nun ist:

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$i^{4n} = +1 \quad \text{[nach Formel 1), Frage 5]}$$

folglich gibt:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = \frac{1}{+1} = +1$$

---

f) $(-i)^{-39}$

f) Der Exponent 39 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 9 und zum Rest $+3$. Man erhält hiernach für:

$$(-i)^{-39} = (-i)^{-(4 \cdot 9 + 3)}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{-(4n+3)}$$

$$= \frac{1}{(-i)^{4n+3}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nun ist:

$$i^{4n+3} = -i \quad \text{[nach Formel 4), Frage 5]}$$

und

$$(-i)^{4n+3} = -(-i) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

folglich ist:

$$(-i)^{-39} = \frac{1}{-(-i)} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

g) $(\sqrt{-1})^{-30}$

g) Der Exponent 30 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 7 und zum Rest $+2$. Man erhält demnach für:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = (\sqrt{-1})^{-(4 \cdot 7 + 2)}$$

oder allgemein:

$$= (\sqrt{-1})^{(-4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}}$$

Nun ist:

$i^{4n+2} = -1$ [nach Formel 3), Frage 5]

folglich:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = \frac{1}{-1} = -1$$

---

h) i^{-97}

h) Dividiert man den Exponenten 97 durch 4, so erhält man 24 zum Quotienten und $+1$ zum Rest. Man kann also schreiben für:

$$i^{-97} = i^{-(4 \cdot 24+1)}$$

oder allgemein:

$$= i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{-97} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

	Andeutungen.
a) $(+\sqrt{-1})^{16}$	a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, a).
b) i^{45}	b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, b).
c) $(-\sqrt{-1})^{62}$	c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, c).
d) $(-i)^{87}$	d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, d).
e) i^{-12}	e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, e).
f) $(-i)^{-17}$	f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, h).
g) $(+\sqrt{-1})^{-54}$	g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, g).
h) $(-\sqrt{-1})^{-103}$	h) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, f).

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen.

Anmerkung 4. Das Symbol $\sqrt{-a}$ stellt sowohl eine positive, als auch eine negative imaginäre Zahl dar (siehe Antwort auf Frage 2 und Erkl. 10). Um das Verständnis der nachfolgenden Gesetze zu erleichtern und die Rechnung einfacher zu gestalten, soll im Folgenden immer nur ein Wert Berücksichtigung finden und zwar, wenn vor der imaginären Zahl kein Vorzeichen oder das Zeichen $+$ steht, nur der positive, und wenn vor derselben das Zeichen $-$ steht, nur der negative Wert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg