Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

A. Über die imagniären Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Die imaginären und komplexen Zahlen.

Anmerkung 1. Die allgemeine Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und deren Formen und Verhältnissen. Von den verschiedenen Arten der Zahlen sind die sogenannten imaginären (und die aus ihnen hervorgegangenen komplexen) Zahlen für alle Teile der Mathematik von der grössten Wichtigkeit. Es bedurfte grosser Anstrengungen der bedeutendsten Mathematiker — wir nennen: d'Alembert, Bernoulli, Euler, Moivre, Gauss —, um dies zum allgemeinen Bewusstsein der mathematischen Gelehrtenwelt zu bringen. Die meisten Mathematiker des vorigen Jahrhunderts erkannten nicht die hohe Bedeutung der imaginären Zahlen, sie verwarfen sie, weil sie mit den sogenannten reellen Zahlen begrifflich nicht in Beziehung gebracht, durch sie nicht dargestellt werden konnten. Sie glaubten, dass, wenn eine Lösung auf imaginäre Zahlen führe, dies lediglich die Unmöglichkeit desjenigen Problems andeute, auf welches sich die betreffende Lösung beziehe. Ja, als Gauss bereits eine streng wissenschaftlich begründete Theorie der imaginären Zahlen veröffentlicht hatte (1831), gab es noch immer hervorragende Mathematiker, wie z. B. Cauchy, welche diesen Zahlen jede Existenzberechtigung absprachen.

Es erging also den imaginären Zahlen ähnlich wie zwei Jahrhunderte vorher den negativen Zahlen, welche anfänglich nicht als Differenzen mit grösserem Subtrahendus anerkannt wurden. Mit diesen, sowie mit den irrationalen Zahlen und den rationalen Brüchen sind die imaginären Zahlen jedoch zum mindesten auf eine gleiche Stufe zu stellen.

Dass man die imaginären Zahlen, welche bei der Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade Berücksichtigung gefunden hatten, so lange Zeit „aus einem falschen Gesichtspunkte betrachtet und eine geheimnisvolle Dunkelheit bei ihnen gefunden hat", schreibt Gauss grösstenteils der „wenig schicklichen Bezeichnung" zu. Hätte man die imaginäre Einheit (vergl. Antwort auf Frage 2) z. B. „laterale Einheit" genannt, so hätte — nach seiner Ansicht — von einer solchen Dunkelheit kaum die Rede sein können.[1])

[1]) Siehe das Litteraturverzeichnis am Schlusse dieses Werkes.

Anmerkung 2. Die hohe Bedeutung, welche die imaginären und komplexen Zahlen für die Entwickelung mathematischer Gesetze und besonders für die algebraischen Gleichungen höheren Grades besitzen, wird der Studierende dieses Werkes zur Genüge kennen lernen. Er wird finden, dass die ausgezeichneten Eigenschaften dieser Zahlen es oft ermöglichen, grosse, sich bei der Rechnung einstellende Schwierigkeiten zu überwinden und schneller als auf jedem anderen Wege zur Entdeckung neuer Wahrheiten zu gelangen.

Deswegen ist diesen Zahlen in dieser Encyklopädie ein besonderer Band — der vorliegende — gewidmet worden.

A. Ueber die imaginären Zahlen.

Anmerkung 3. Zum Verständnis der in diesem Teile vorgeführten Formelentwickelungen und Berechnungen sind diejenigen Kenntnisse der Algebra — besonders der Gleichungen vom ersten Grade und der Potenz- und Wurzelrechnung — erforder-

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

lich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten, bezw. der Potenzen und Wurzeln erworben werden können.

1) Ueber die imaginären Zahlen und deren Einheiten im allgemeinen.

Frage 1. Was versteht man unter imaginären Zahlen im engeren Sinne, was im weiteren Sinne, und auf welche Weise werden solche Zahlen dargestellt?

Antwort. Zahlen (und nur solche), die in die zweite Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im engeren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt{-a})^2 = -a \quad \text{(siehe Erkl. 5)}$$

Zahlen (und nur solche), die in eine gerade (z. B. $n$te) Potenz erhoben eine negative Zahl ergeben, heissen imaginäre Zahlen im weiteren Sinne. Dargestellt wird eine solche Zahl durch das Symbol:

$$\sqrt[n]{-a}$$

Denn nach dem gegebenen Kriterium ist:

$$(\sqrt[n]{-a})^n = -a$$

Erkl. 1. Das Wort „imaginär“ stammt von dem lateinischen Worte imago (Bild) und bedeutet: „nur in der Einbildung beruhend“ oder auch „unmöglich“. — Es wurde zuerst von Descartes (Géom. III) als Prädikat der Wurzeln von Gleichungen angewendet.

Erkl. 2. Das Wort „Symbol“ (griech.) bedeutet: „Zeichen“ oder „Sinnbild“.

Erkl. 3. Das Wort „Kriterium“ (griech.) bedeutet: „Kennzeichen“.

Erkl. 4. Die Definition (Erklärung) der Wurzelausziehung ist im Folgenden gegeben:

„Aus einer Zahl a die $n$te Wurzel ausziehen, heisst, eine dritte Zahl b bilden, welche zur $n$ten Potenz erhoben die Zahl a hervorbringt.“

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a} = b$$

wenn:

$$b^n = a \text{ ist.}$$

Erkl. 5. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Potenziert man eine Wurzel auf den Grad ihres Wurzelexponenten, so hebt sich die Wurzel gegen die Potenz und man erhält den Radikandus.“

In Zeichen:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Z. B.:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = +25$$

denn:

$$(\sqrt[2]{+25})^2 = (\pm 5)^2 = +25$$

Erkl. 6. Die imaginäre Zahl im engeren Sinne $(\sqrt{-a})$ wird auch „imaginäre Quadratwurzel“ genannt.

Erkl. 7. Aus der Definition der Wurzel (siehe Erkl. 4) ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist biform (siehe Erkl. 7a), nämlich positiv und negativ, denn nicht nur die positive, sondern auch die negative Zahl gibt zu einer geraden Potenz erhoben ein positives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt{+36} = +6$ und $= -6$, weil sowohl $(+6)^2$ als auch $(-6)^2$ den Radikandus $+36$ hervorbringt.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n]{+(a^{2n})} = +a \text{ und } = -a$$

2) Jede ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist nur eindeutig, nämlich nur negativ, denn nur eine negative Zahl gibt zu einer ungeraden Potenz erhoben ein negatives Produkt. — So ist z. B. $\sqrt[3]{-125} = -5$, weil nur $(-5)^3 = -125$ ist.

Dargestellt wird dieses Gesetz durch:

$$\sqrt[2n+1]{-(a^{2n+1})} = -a$$

3) Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl gibt weder eine positive noch eine negative Zahl. — So ist z. B. $\sqrt[2]{-81}$ weder $+9$ noch -9, weil $(+9)^2$ und $(-9)^2$ nicht $= -81$ sind. Ueberhaupt gibt es in dem ganzen Gebiete der sogenannten reellen Zahlen (siehe Erkl. 11) keine positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl, deren Quadrat eine negative Zahl ist. Die Unmöglichkeit, unter den reellen Zahlen eine zu finden, welche z. B. $\sqrt[2]{-81}$ vollständig entspricht, führte auf die in der Antwort auf Frage 1 gegebene Definition der imaginären Zahlen.

Erkl. 7a. Das Wort „biform“ (auch „biformis“) stammt vom Lateinischen bis (zweimal) und forma (die Gestalt) und bedeutet also „zweigestaltig“ oder „doppeldeutig“.

Frage 2. Was versteht man unter den Einheiten der imaginären Zahlen und auf welche Weise gelangt man zu denselben?

Erkl. 8. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird radiziert, indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliziert.“

In Zeichen:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Umgekehrt ist:

$$\sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Antwort. Unter den imaginären Einheiten versteht man die Symbole:

$$+\sqrt[2]{-1} \text{ und } -\sqrt[2]{-1}$$

Man gelangt zu denselben mit Hilfe der in den Erkl. 8 und 9 aufgeführten Sätze, indem man eine, allgemein durch $\sqrt[2n]{-a}$ dargestellte, imaginäre Zahl umformt, wie folgt:

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{-a}} \text{ (nach Erkl. 8)}$$

Erkl. 9. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Ein Produkt wird radiziert, indem man jeden einzelnen Faktor radiziert."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Erkl. 10. Bei einer durch $\sqrt[2]{-a}$ dargestellten imaginären Zahl hat man stets zu unterscheiden, ob $+\sqrt[2]{-a}$ oder $-\sqrt[2]{-a}$ gemeint ist, ob sie also positiv oder negativ sein soll.

Erkl. 11. Die Einführung der imaginären Zahlen führte zur Bezeichnung aller übrigen Zahlen als reelle (oder auch reale, wirkliche). Man versteht also unter reellen Zahlen alle die durch Multiplikation und Division aus $+1$ und -1 abgeleiteten Zahlen. Die Reihe der reellen Zahlen und die der imaginären haben nur die Null gemeinschaftlich.

Erkl. 12. Das Wort „absolut" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „abgelöst". In der Mathematik ist die absolute Zahl eine Zahl ohne Rücksicht auf das sie begleitende Zeichen. Die Zahlen $+5$, -5, $+5i$, $-5i$ haben sämtlich den absoluten Wert 5.

Erkl. 13. Lässt sich eine Wurzel durch eine ganze Zahl oder durch einen Bruch genau ausdrücken, so heisst sie rational, andernfalls irrational. Die Irrationalzahl ist demnach eine Zahl, welche sich nicht mehr als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt.

Erkl. 14. Das ganze Zahlengebiet zerfällt in:

1) reelle Zahlen;
   a) rationale Zahlen;
      α) ganze Zahlen;
      β) gebrochene Zahlen;
   b) irrationale Zahlen;
2) imaginäre Zahlen.

Letztere sind an sich weder rational, noch irrational, sie können aber, wie die reellen Zahlen, positiv oder negativ sein.

Frage 3. Welche kürzere Bezeichnung ist für die Symbole $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ in die Wissenschaft eingeführt worden?

und

$$\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \cdot (-1)} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$$

(nach Erkl. 9)

Da nun $\sqrt[2]{a}$ eine reelle Zahl (siehe Erkl. 11) ist — aus welchem Grunde auch in dem Ausdrucke $\sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$ der Faktor $\sqrt[2]{a}$ „reeller Faktor" genannt wird — und diese reelle Zahl sowohl positiv als auch negativ ist, so erhält man:

$$\sqrt[2]{-a} = +r \cdot \sqrt[2]{-1} \text{ bezw. } = -r \cdot \sqrt[2]{-1}$$

oder:

$$\sqrt[2]{-a} = r \cdot (+\sqrt[2]{-1}) \text{ bezw. } = r \cdot (-\sqrt[2]{-1})$$

wenn der aus dem reellen Faktor resultierende absolute Wert mit r bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich der Satz:

„Jede imaginäre Zahl ist gleich einem Produkte aus einem reellen und einem imaginären Faktor."

Der reelle Faktor stellt eine rationale oder eine irrationale Zahl (siehe Erkl. 13) dar, der imaginäre Faktor die imaginäre Einheit (siehe die Aufgaben 1 bis 4).

Antwort. Die imaginäre Einheit $\pm\sqrt{-1}$ wird nach Gauss (Disquisitiones arithmeticae, Sect. VII, Art. 337) mit dem ersten Buchstaben des Wortes „imaginär" bezeichnet.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Man schreibt also für:

$$\pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2}\cdot i = \pm a\cdot i$$

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 1. Man scheide aus $\sqrt[2]{-25}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung. Man erhält (nach Antwort auf Frage 2):

$$\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25\cdot(-1)} = \sqrt[2]{25}\cdot\sqrt[2]{-1} = \pm 5i$$

Der reelle Faktor dieser imaginären Zahl gibt demnach eine rationale Zahl (siehe Erkl. 13).

Aufgabe 2. Man stelle $\sqrt[2]{-6}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung. Nach der Antwort auf die Frage 2 erhält man:

$$\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6\cdot(-1)} = \sqrt[2]{6}\cdot\sqrt[2]{-1}$$
$$= \pm 2{,}44949\cdots i$$

Der reelle Faktor gibt also hier eine Irrationalzahl (siehe Erkl. 13).

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 3. Man scheide aus $\sqrt[2]{-121}$ die imaginäre Einheit aus und bestimme, ob der reelle Faktor rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Man stelle $\sqrt[2]{-5}$ als ein Produkt aus einem reellen und einem imaginären Faktor dar und bestimme, ob ersterer rational oder irrational ist.

Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 2.

2) Ueber die imaginären Einheiten im besonderen.

Frage 4. Welche Beziehungen bestehen zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit, und auf welche Weise lässt sich die Richtigkeit der Behauptungen darthun?

Antwort. Zwischen der positiven und der negativen imaginären Einheit bestehen folgende Beziehungen:

a) $-i = \frac{1}{+i}$

Erkl. 15. Zwei Zahlen heissen „reciprok“, wenn ihr Produkt $= 1$ ist. Es ist z. B. a das Reciproke von $\frac{1}{a}$, weil $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ist.

Das Wort „reciprok“ (lat.) bedeutet „gegenseitig“, „wechselseitig“, auch „umgekehrt“.

Erkl. 16. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man mit beiden Seiten derselben die gleiche Rechnung vornimmt, z. B. beide Seiten mit derselben Zahl multipliziert, beide Seiten zur gleichen Potenz erhebt, aus beiden Seiten die gleiche Wurzel zieht.“

Erkl. 17. Wird ein Bruch mit seinem Nenner multipliziert, so erhält man seinen Zähler.

Erkl. 18. Der Bruch zweier Zahlen ist negativ, wenn Zähler und Nenner ungleiche Vorzeichen haben.

Erkl. 18 a. Zwei Zahlen mit gleichen Vorzeichen geben ein positives, mit ungleichen ein negatives Produkt.

in Worten:

„Die negative imaginäre Einheit ist gleich dem Reciproken (siehe Erkl. 15) der positiven.“

Beweis. Setzt man in die Gleichung:

$$-i = \frac{1}{+i}$$

für i eine andere Buchstabengrösse, z. B. x ein, so erhält man:

$$-x = \frac{1}{+x}$$

Multipliziert man beide Seiten dieser Gleichung mit $(+x)$, so folgt:

$$(-x)\cdot(+x) = \left(\frac{1}{+x}\right)\cdot(+x) \quad \text{(s. Erkl. 16)}$$

oder:

$$-x^2 = +1 \quad \text{(siehe Erkl. 17 u. 18a)}$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit (-1), so erhält man:

$$(-x^2)\cdot(-1) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

$$+x^2 = -1$$

Zieht man schliesslich noch aus beiden Seiten der letzten Gleichung die Quadratwurzel, so ergibt sich:

$$\sqrt{+x^2} = \sqrt{-1}$$

d. i.:

$$x = i$$

Es gibt also keine andere Zahl als i, welche die behauptete Eigentümlichkeit besitzt.

---

b) $(+i)\cdot(-i) = +1$

in Worten:

„Das Produkt aus der positiven und der negativen imaginären Einheit ist gleich $+1$.“

Beweis. Es ist:

$$(+i)\cdot(-i) = (+i)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right)$$

[nach Teil a) dieser Antwort]

oder:

$$(+i)\cdot(-i) = +1 \quad \text{(nach Erkl. 17)}$$

---

c) $(+i)^2 = -1$ und $(-i)^2 = -1$

in Worten:

„Das Quadrat der imaginären Einheit, sowohl der positiven als auch der negativen, ist gleich -1.“

Beweis. Es war:

$$+i = +\sqrt{-1} \text{ und } -i = -\sqrt{-1}$$

(siehe Antwort auf Frage 3)

Man erhält demnach:

$$(+i)^2 = (+\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$
$$(-i)^2 = (-\sqrt{-1})^2 = +(-1) = -1$$

(siehe Erkl. 18a und 7,1)

oder:

$$(-i)^2 = (-i)\cdot(-i) = \frac{1}{+i}\cdot\frac{1}{+i}$$
$$[\text{nach Teil a)}] = \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1}$$
$$(\text{nach vorstehend. Beweis}) = -1 \quad (\text{s. Erkl. 18})$$

Erkl. 19. Jede Grösse, durch sie selbst geteilt, gibt $+1$.

Erkl. 20. Ist das Produkt zweier Faktoren gleich dem zweier anderen, so bilden die Faktoren des einen Produktes die äusseren, die des anderen die inneren Glieder einer Proportion.

Hieraus ergibt sich, wenn man die Zahl -1 von der rechten Seite der Gleichung auf die linke nimmt:

d) $(\pm i)^2 + 1 = 0$

in Worten:

„Das Quadrat der positiven und der negativen imaginären Einheit, vermehrt um $+1$, gibt Null."

Erkl. 20 a. Ein Satz aus der Proportionenlehre lautet:

„In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem der inneren."

Und aus derselben Gleichung:

$$(\pm i)^2 = -1$$

folgt noch weiter:

$$(+i)\cdot(+i) = (+1)\cdot(-1)$$

und

$$(-i)\cdot(-i) = (+1)\cdot(-1)$$

oder:

e) $\begin{cases} (+1):(+i) = (+i):(-1) \\ (+1):(-i) = (-i):(-1) \end{cases}$

(nach Erkl. 20)

in Worten:

„Die imaginäre Einheit (sowohl die positive, als auch die negative) ist die mittlere Proportionale von $+1$ und -1." (Siehe Erkl. 21.)

Erkl. 21. Sind die inneren Glieder (das zweite und dritte Glied) einer Proportion gleich, so nennt man letztere stetig und jedes der beiden inneren Glieder die mittlere Proportionale.

Frage 5. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Einheit berechnen und welche Beziehungen finden zwischen diesen Potenzen statt?

Antwort. Bezeichnet n irgend eine reelle, positive oder negative Zahl (einschliesslich Null), so findet statt:

1) $i^{4n} = +1$
2) $i^{4n+1} = +i$
3) $i^{4n+2} = -1$
4) $i^{4n+3} = -i$

Die Richtigkeit vorstehender Formeln lässt sich am einfachsten durch direkte Berechnung der ersten Potenzen von i nachweisen.

Erkl. 22. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Die nullte Potenz einer jeden Zahl ist gleich $+1$, die erste Potenz die Zahl selbst."

In Zeichen:

$$(\pm a)^0 = +1$$
$$(+a)^1 = +a; \qquad (-a)^1 = -a$$

Erkl. 23. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Summe darstellt, ist gleich dem Produkte von Potenzen, deren Grundzahlen gleich der Basis der gegebenen Potenz und deren Exponenten gleich den Summanden des gegebenen Exponenten sind."

In Zeichen:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert."

Erkl. 24. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Eine Potenz, deren Exponent eine Differenz darstellt, ist gleich einem Bruche, dessen Zähler eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Minuendus des gegebenen Exponenten als Exponenten, und dessen Nenner eine Potenz ist mit der Basis der gegebenen Potenz als Grundzahl und dem Subtrahendus des gegebenen Exponenten als Exponenten."

In Zeichen:

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

Umgekehrt ist auch:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

In Worten:

„Potenzen von derselben Grundzahl werden dividiert, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahiert."

Wird $m = n$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{n-n} = a^0$$

Es ist also:

$$a^0 = \frac{a^n}{a^n} = +1 \quad \text{(vgl. Erkl. 22)}$$

Für die Pluspotenzen (s. Erkl. 24) erhält man:

a) wenn $n = 0$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot 0} = i^0 = +1 \quad \text{(siehe Erkl. 22 u. 24)}$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot 0+1} = i^1 = i \quad \text{(siehe Erkl. 22)}$$
$$i^{4n+2} = i^{4\cdot 0+2} = i^2 = -1$$
[nach Antwort c) auf Frage 4]
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot 0+3} = i^3 = i^1 \cdot i^2 \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= i\cdot(-1) = -i$$

b) wenn $n = 1$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot 1} = i^4 = i^2 \cdot i^2 \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= (-1)\cdot(-1) = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4+1} = i^5 = i^2 \cdot i^3$$
$$= (-1)\cdot(-i) = +i$$
$$i^{4n+2} = i^{4+2} = i^6 = i^3 \cdot i^3 = (-i)\cdot(-i)$$
$$= \left(\frac{1}{+i}\right)\cdot\left(\frac{1}{+i}\right) \quad \text{[nach Antwort a) auf Frage 4]}$$
$$= \frac{1}{(+i)^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4+3} = i^7 = i^3 \cdot i^4$$
$$= (-i)\cdot(+1) = -i$$
und so fort.

Für die Minuspotenzen (s. Erkl. 24) ergibt sich:

a) wenn $n = -1$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot(-1)} = i^{-4} = \frac{1}{i^4} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$
$$= \frac{1}{+1} = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-1)+1} = i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i}$$
$$= -\frac{1}{i} \quad \text{(siehe Erkl. 18)} = -(-i)$$
[nach Antwort a) auf Frage 4] $= +i$
$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-1)+2} = i^{-2}$$
$$= \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-1)+3} = i^{-1} = \frac{1}{i} = -i$$

b) wenn $n = -2$ ist:

$$i^{4n} = i^{4\cdot(-2)} = i^{-8} = \frac{1}{i^8} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$
$$= \frac{1}{i^4}\cdot\frac{1}{i^4} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$
$$= \frac{1}{(+1)}\cdot\frac{1}{(+1)} = +1$$
$$i^{4n+1} = i^{4\cdot(-2)+1} = i^{-7} = \frac{1}{i^7} = \frac{1}{-i}$$
$$= -\frac{1}{i} = -(-i) = +i$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Wird $m = 0$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Es ist also:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

In Worten:

„Die Minuspotenz (d. h. die Potenz mit negativem Exponenten) ist das Umgekehrte der Pluspotenz (d. h. der Potenz mit positivem Exponenten).

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-2)+2} = i^{-6}$$
$$= \frac{1}{i^6} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-2)+3} = i^{-5}$$
$$= \frac{1}{i^5} = \frac{1}{+i} = -i$$

und so fort.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

„Die Potenzen der imaginären Einheit — sowohl die mit positiven, als auch die mit negativen Exponenten — kehren stets weder."

Die Periode ist:

$$+1; \quad +i; \quad -1; \quad -i$$

Andere Werte, als die vorstehenden, können sich bei keiner Potenz von i ergeben.

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 5. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

a) $(\sqrt{-1})^{24}$

b) i^{89}

c) $(-\sqrt{-1})^{126}$

Auflösungen.

a) Der Exponent 24 lässt sich durch 4 ohne Rest teilen, denn $24 = 4\cdot 6$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{24} = i^{4\cdot 6}$$

oder allgemein:

$$= i^{4\cdot n}$$

Nach Formel 1) (Frage 5) ist:

$$i^{4n} = +1$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-1})^{24} = +1$$

b) Der Exponent 89 gibt, durch 4 geteilt, den Quotient 22 und den Rest $+1$. Man erhält demnach für:

$$i^{89} = i^{4\cdot 22+1}$$

oder allgemein:

$$= i^{4n+1}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{89} = +i$$

c) Der Exponent 126, durch 4 geteilt, gibt den Quotient 31 und den Rest $+2$. Man kann also schreiben für:

$$(-\sqrt{-1})^{126} = (-\sqrt{-1})^{4\cdot 31+2}$$

oder allgemein:

$$(-i)^{126} = (-i)^{4n+2}$$

Nach Formel 3) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+2} = -1$$

folglich ist:

$$(-i)^{126} = -1$$

Erkl. 25. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ."

denn das Resultat ändert sich nicht, wenn i negativ ist, weil der Potenzexponent eine gerade Zahl ist (siehe Erkl. 25).

---

d) $(-i)^{163}$

d) Der Exponent 163 lässt sich zerlegen in: $4 \cdot 40 + 3$. Folglich ist:

$$(-i)^{163} = (-i)^{4 \cdot 40 + 3}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{4n+3}$$

Nach Formel 4) (Frage 5) gibt:

$$i^{4n+3} = -i$$

Da die Grundzahl der gegebenen Potenz negativ und der Exponent eine ungerade Zahl ist, so erhält man (nach Erkl. 25) für:

$$(-i)^{163} = -(-i) = +i$$

---

e) $(\sqrt{-1})^{-20}$

e) Der Exponent -20 lässt sich zerlegen in: $-4 \cdot 5$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = i^{-4 \cdot 5}$$

oder allgemein:

$$= i^{-4n}$$

Nun ist:

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$i^{4n} = +1 \quad \text{[nach Formel 1), Frage 5]}$$

folglich gibt:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = \frac{1}{+1} = +1$$

---

f) $(-i)^{-39}$

f) Der Exponent 39 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 9 und zum Rest $+3$. Man erhält hiernach für:

$$(-i)^{-39} = (-i)^{-(4 \cdot 9 + 3)}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{-(4n+3)}$$

$$= \frac{1}{(-i)^{4n+3}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nun ist:

$$i^{4n+3} = -i \quad \text{[nach Formel 4), Frage 5]}$$

und

$$(-i)^{4n+3} = -(-i) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

folglich ist:

$$(-i)^{-39} = \frac{1}{-(-i)} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

g) $(\sqrt{-1})^{-30}$

g) Der Exponent 30 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 7 und zum Rest $+2$. Man erhält demnach für:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = (\sqrt{-1})^{-(4 \cdot 7 + 2)}$$

oder allgemein:

$$= (\sqrt{-1})^{(-4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}}$$

Nun ist:

$i^{4n+2} = -1$ [nach Formel 3), Frage 5]

folglich:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = \frac{1}{-1} = -1$$

---

h) i^{-97}

h) Dividiert man den Exponenten 97 durch 4, so erhält man 24 zum Quotienten und $+1$ zum Rest. Man kann also schreiben für:

$$i^{-97} = i^{-(4 \cdot 24+1)}$$

oder allgemein:

$$= i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{-97} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

	Andeutungen.
a) $(+\sqrt{-1})^{16}$	a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, a).
b) i^{45}	b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, b).
c) $(-\sqrt{-1})^{62}$	c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, c).
d) $(-i)^{87}$	d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, d).
e) i^{-12}	e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, e).
f) $(-i)^{-17}$	f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, h).
g) $(+\sqrt{-1})^{-54}$	g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, g).
h) $(-\sqrt{-1})^{-103}$	h) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, f).

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen.

Anmerkung 4. Das Symbol $\sqrt{-a}$ stellt sowohl eine positive, als auch eine negative imaginäre Zahl dar (siehe Antwort auf Frage 2 und Erkl. 10). Um das Verständnis der nachfolgenden Gesetze zu erleichtern und die Rechnung einfacher zu gestalten, soll im Folgenden immer nur ein Wert Berücksichtigung finden und zwar, wenn vor der imaginären Zahl kein Vorzeichen oder das Zeichen $+$ steht, nur der positive, und wenn vor derselben das Zeichen $-$ steht, nur der negative Wert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 6. Wie werden imaginäre Zahlen addiert?

Antwort. Imaginäre Zahlen werden addiert, indem man die algebraische Summe ihrer reellen Faktoren mit der imaginären Einheit multipliziert.

Behauptung.

$$\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$

Beweis. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-a}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\\ \text{und}\quad \sqrt{-b}&=\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 2)}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\\ &=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}$$

(nach Erkl. 26)

Erkl. 26. Wenn die Glieder einer Summe einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so kann man jedes dieser Glieder durch diesen Faktor dividieren, die Quotienten algebraisch addieren, sie in eine Klammer setzen und letztere mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizieren; z. B.:

$$\begin{aligned}81a^4-54a^2&=\left(\frac{81a^4}{27a^2}-\frac{54a^2}{27a^2}\right)\cdot 27a^2\\ &=(3a^2-2)\cdot 27a^2\end{aligned}$$

denn umgekehrt gibt:

$$(3a^2-2)\cdot 27a^2=81a^4-54a^2$$

Erkl. 27. Wenn man die Zweideutigkeit der Wurzeln berücksichtigt, so erhält man für $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$ nicht weniger als vier verschiedene Lösungen, nämlich wenn der aus $\sqrt{a}$ resultierende absolute Wert mit r und der aus $\sqrt{b}$ resultierende mit r_1 bezeichnet wird, die folgenden:

1) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r+r_1)\cdot i$

2) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r+r_1)\cdot i$

3) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r-r_1)\cdot i$

4) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r-r_1)\cdot i=-(r+r_1)\cdot i$

(Siehe die beiden folgenden Erkl. 28 u. 28a).

Erkl. 28. Der Satz von der Auflösung der Klammern lautet:

„Gleiche Zeichen vor und in der Klammer geben +, ungleiche —."

Erkl. 28a. Es ist üblich, das Rechnungszeichen der Summe (+) fortzulassen und die Glieder nur mit ihren Vorzeichen aneinanderzureihen, also statt: $(+\sqrt{a})+(-\sqrt{b})$ zu schreiben: $+\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Erkl. 29. Sind mehrere imaginäre Zahlen positiv und mehrere negativ, so hat man zuerst alle positiven, dann alle negativen Zahlen für sich zu addieren und schliesslich die beiden Summen nach der in der Antwort auf Frage 6 gegebenen Regel zu vereinigen.

Frage 7. Wie wird eine imaginäre Zahl von einer andern subtrahiert?

Antwort. Eine imaginäre Zahl wird von einer andern subtrahiert, indem man

Erkl. 30. Die für das Rechnen mit reellen Zahlen aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf die imaginären Zahlen anwenden, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen. Da die imaginären Zahlen aus der imaginären Einheit in gleicher Weise entstehen wie die reellen Zahlen aus der reellen Einheit, so lassen sich auch die imaginären Zahlen zu einander addieren und von einander subtrahieren.

sie zu letzterer mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

In Zeichen:

$$\sqrt{-a}-(+\sqrt{-b})=\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$$
(nach Erkl. 28)

$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(nach Erkl. 26)

und

$$\sqrt{-a}-(-\sqrt{-b})=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$$
$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(siehe Erkl. 30)

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})$

Auflösung. a) Man erhält:

$$(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})=(+\sqrt{256}\cdot\sqrt{-1})+(\sqrt{729}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{196}\cdot\sqrt{-1})$$
$$=(+16i)+(+27i)+(-11i)+(-14i)$$
$$=(16+27-11-14)i=+18i$$

---

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)$

b) $$\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)=\left(+\sqrt{\frac{16a^4}{25b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)-\left(-\sqrt{\frac{36a^4}{49b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)=+\frac{4a^2}{5b}\cdot i+\frac{6a^2}{7b}\cdot i$$ (nach Erkl. 31)

oder:

$$=\frac{58a^2i}{35b}$$ (nach Erkl. 26)

---

c) $2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}$

Erkl. 31. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Die $n$te Wurzel aus einem Bruche ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzel des Zählers durch die $n$te Wurzel des Nenners."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Es ist:

$$2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}=2\cdot\sqrt{96}\cdot\sqrt{-1}-3\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{-1}+5\cdot\sqrt{216}\cdot\sqrt{-1}-7\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{-1}$$

oder, indem man die Radikanden der reellen Wurzeln soweit in Faktoren zerlegt, dass sich wenigstens teilweise die Wurzel ziehen lässt, und für $\sqrt{-1}=i$ setzt:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{16\cdot 6}-3\cdot i\cdot\sqrt{4\cdot 6}+5\cdot i\cdot\sqrt{36\cdot 6}-7\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 6}$$

Umgekehrt gibt:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

d) $\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a}$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2 \cdot i \cdot 4 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} - 7 \cdot i \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 8i\sqrt{6} - 6i\sqrt{6} + 30i\sqrt{6} - 21i\sqrt{6} = +11i\sqrt{6}$$

Erkl. 32. Um Faktoren, die vor einer Wurzel stehen, unter dieselbe zu bringen, muss man sie auf den Grad potenzieren, welchen die Wurzel besitzt.

In Zeichen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

d) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-1} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} - 2a \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}\sqrt{-1} + b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

und, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(b \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} - 2ab \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + b \cdot \sqrt{a}\right) \cdot i$$

oder, da: $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$ ist (nach Erkl. 32):

$$= (b \cdot \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + b\sqrt{a}) \cdot i$$

$$= (b - 2 - 2b + b) i \sqrt{a} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

$$= -2i\sqrt{a}$$

---

e) $5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

e) Zunächst gibt:

$$5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{-1} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-1} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= \sqrt{\frac{5^2}{5}} = \sqrt{5} \\ \text{und} \quad 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{5^2}{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \text{(nach Erkl. 32)}$$

Folglich erhält man für:

$$\left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot i - 4\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

oder $= 5i\sqrt{5}$.

---

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot a}{25 \cdot 0{,}2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0{,}3 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5\,d} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \frac{7\,b}{c\,d^3} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} - \frac{90\,a b}{c^2 d^2} + \frac{49\,a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64\,x^4 y^2}{81\,z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100\,x^2}{169\,z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3\,a} \cdot \sqrt{-\frac{9\,a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25\,a^3}{9\,b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

f) $y^4 \cdot \sqrt{-\frac{x^6 y}{z^3}} - x \cdot \sqrt{-\frac{x y^5}{z^5}} - \frac{x^3}{z} \cdot \sqrt{-\frac{y^9}{z}} + y^2 z \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{-\frac{y^3}{x^5}}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, f).

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 8. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln miteinander multipliziert?

Erkl. 33. Die Mathematiker zu Ende des vorigen Jahrhunderts waren darüber im Zweifel, was man unter dem Produkte zweier imaginären Quadratwurzeln zu verstehen habe. Ein Teil von ihnen (z. B. auch Euler) war der Ansicht, dass dieses Produkt gleich einer reellen Grösse, nämlich:

$$= -\sqrt{a \cdot b}$$

wäre; die übrigen (darunter z. B. der englische Mathematiker Emerson) glaubten für:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

setzen zu müssen, weil ein Produkt aus unmöglichen Grössen keine mögliche Grösse geben könnte. (Vergl. Hutton, Mathematical dictionary, 1796.)

Erkl. 33 a. Das Produkt zweier imaginären Zahlen ist gleich dem Produkt der entsprechenden reellen Zahlen. Letzteres Produkt ist positiv, wenn die imaginären Faktoren ungleiche, negativ, wenn sie gleiche Vorzeichen besitzen.

Man erhält also:

$$(+ai) \cdot (+bi) = +abi^2 = -ab$$

und

$$(+ai) \cdot (-bi) = -abi^2 = +ab$$

Antwort. Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der negativen Quadratwurzel aus dem Produkte der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

(nach Antwort auf Frage 4, c)

folglich ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (-1) = -\sqrt{a \cdot b}$$

(vergl. Erkl. 33 a)

Frage 9. Was erhält man für:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}\,?$$

Erkl. 34. Eine Summe von gleichen imaginären Summanden ist gleich einem Produkte aus einer imaginären und einer reellen Zahl.

Man erhält für:

$$(+ai) \cdot b = +ai + ai + ai + \cdots$$
$$= +(a + a + a \cdots)\, i = (ab)\, i$$

und für:

$$(-ai) \cdot b = (-ai) + (-ai) + \cdots$$
$$= -(a + a + a \cdots)\, i = -(ab)\, i$$

Eine Multiplikation mit $-b$ hat dieselbe Bedeutung wie eine Multiplikation mit b und eine Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Demnach ist:

$$(+ai) \cdot (-b) = -(ab)\, i$$

und

$$(-ai) \cdot (-b) = +(ab)\, i$$

Antwort. Das Produkt zweier Quadratwurzeln, von welchen die eine imaginär ist, ist imaginär und gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a \cdot b \cdot (-1)} = \sqrt{-a \cdot b}$$

(oder $= i\sqrt{ab}$) (siehe Erkl. 34).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 10. Was erhält man für:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach vorstehender Antwort ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-a \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = ai$$

Frage 11. Was erhält man für:

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 8 ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -\sqrt{a \cdot a} = -\sqrt{a^2} = -a$$

In Worten:

„Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln mit gleichen Radikanden ist gleich dem negativen Radikandus."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

Auflösung. a) Es ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= -\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= -\sqrt{ab} \cdot (-1) = +\sqrt{ab}$$

b) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

b) Wie vorstehend gezeigt wurde, ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = +\sqrt{a \cdot a}$$
$$= +\sqrt{a^2} = +a$$

c) $-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

c) Es ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (-\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= +\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= +\sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}$$

d) $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

d) Nach vorstehender Lösung ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so ergibt sich:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -\sqrt{aa}$$
$$= -\sqrt{a^2} = -a$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

e) $a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5}$

e) Man erhält für:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot \sqrt{a^5 b^3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{ab^5} \cdot \sqrt{-1}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= a \cdot \sqrt{a^6 b^8} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$\sqrt{a^6 b^8} = a^3 b^4 \text{ und } (\sqrt{-1})^2 = -1$$

folglich ist:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot (-1) = -a^4 b^4$$

f) $-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 8 gibt:

$$\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}} = -\sqrt{7 \cdot 5\frac{1}{7}} = -\sqrt{36} = -6$$

also:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) = -(-6) = +6$$

ferner:

$$+\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}$$
$$= +\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= +\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4\frac{4}{9}} \cdot (\sqrt{-1})^4 = +\sqrt{400} \cdot (+1) = +20$$

(vergleiche Anmerkung 3)

endlich:

$$-\left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = -\left(-\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{128}{7}}\right) = -(-\sqrt{64}) = +8$$

Demnach erhält man für:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = +6 + 20 + 8 = +34$$

g) $\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}}$

g) Der Minuendus:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

gibt nach Absonderung der imaginären Einheit und Vereinigung der reellen Wurzeln:

$$= \sqrt{\frac{a^3 \cdot a^2 \cdot b}{b^2 \cdot b^3 \cdot a}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

der Subtrahendus:

$$= \sqrt{\frac{b^5 \cdot a^2 \cdot a^9}{a^7 \cdot b \cdot b^8}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

Folglich erhält man für:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}} = -\frac{a^2 i}{b^2} - \left(-\frac{a^2 i}{b^2}\right) = 0$$

h) $(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$

h) Nach den Erkl. 18a und 35 gibt:

$$(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$$
$$=2\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-30}+3\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-30}-$$
$$4\cdot\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-30}+5\cdot\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-30}$$

oder:

$$=2\cdot(-\sqrt{150})+3\cdot(-\sqrt{180})-$$
$$4\cdot(-\sqrt{300})+5\cdot(-\sqrt{450})$$

(nach der Antwort auf Frage 8)

oder nach Zerlegung der Radikanden in solche Faktoren, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann:

$$=-2\cdot\sqrt{25\cdot6}-3\cdot\sqrt{36\cdot5}+$$
$$4\cdot\sqrt{100\cdot3}-5\cdot\sqrt{225\cdot2}$$
$$=-2\cdot5\cdot\sqrt{6}-3\cdot6\cdot\sqrt{5}+$$
$$4\cdot10\cdot\sqrt{3}-5\cdot15\cdot\sqrt{2}$$ (nach Erkl. 9)

d. i.:

$$=-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$

(siehe Erkl. 35a)

Erkl. 35. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird mit einer eingliederigen multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit letzterer multipliziert.

Erkl. 35a. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$
$$=-10\cdot2{,}449-18\cdot2{,}236+40\cdot1{,}732-75\cdot1{,}414$$
$$=-24{,}49-40{,}248+69{,}28-106{,}05$$
$$=-101{,}508$$

---

i) $\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$

i) Nach den Erkl. 18b und 35 ist:

$$\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$$
$$=-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{5}\cdot30}\right)+8\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{6}\cdot30}\right)$$
$$-10\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{6}\cdot30}\right)+8\frac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}\cdot30}\right)$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}+10\cdot5-8\frac{1}{3}\cdot6$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}$$ (siehe Erkl. 35b)

Erkl. 35b. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$+6\sqrt{6}-8\sqrt{5}=+6\cdot2{,}449-8\cdot2{,}236$$
$$=-3{,}194$$

---

k) $(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$

k) Multipliziert man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten (siehe Erkl. 36), so erhält man nach der Antwort auf Frage 8 und nach Erkl. 35:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-39}$$
$$=-\sqrt{13\cdot39}-\sqrt{15\cdot39}$$
$$=-13\sqrt{3}-3\sqrt{65}$$ (s. Erkl. 36a)

und wenn man die erste Klammer mit dem zweiten Gliede der zweiten Klammer multipliziert:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\quad\sqrt{-45})$$
$$=-(-\sqrt{13\cdot45})-(-\sqrt{15\cdot45})$$
$$=-(-3\cdot\sqrt{65})-(-15\cdot\sqrt{3})$$
$$=+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$ (s. Erkl. 36a)

Erkl. 36. Zwei mehrgliederige (Klammer-) Grössen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Gliede der anderen multipliziert und das Gleichnamige vereinigt.

Erkl. 36a. Es gibt:

$$\sqrt{13\cdot39}=\sqrt{13\cdot13\cdot3}=\sqrt{13^2\cdot3}=13\cdot\sqrt{3}$$

(nach Erkl. 9)

$$\sqrt{15\cdot39}=\sqrt{3\cdot5\cdot13\cdot3}=\sqrt{3^2\cdot65}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{13\cdot45}=\sqrt{13\cdot9\cdot5}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{15\cdot45}=\sqrt{15\cdot15\cdot3}=\sqrt{15^2\cdot3}=15\cdot\sqrt{3}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Folglich gibt:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$$
$$= -13\sqrt{3}-3\sqrt{65}+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$
$$= +2\sqrt{3}$$

(oder angenähert $= +2\cdot 1{,}732 = 3{,}464$.)

l) $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$

Erkl. 37. Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Erkl. 37a. Schneller gelangt man zum Resultat, wenn man den in Erkl. 37 aufgeführten Satz anwendet. Man erhält:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= (\sqrt{-ab})^2-(\sqrt{-bc})^2$$
$$= (-ab)-(-bc) \quad \text{(nach Erkl. 5)}$$
$$= -ab+bc = b(c-a)$$

l) Nach Erkl. 36 und Antwort auf Frage 8 erhält man:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= -\sqrt{ab\cdot ab}-\sqrt{bc\cdot ab}+\sqrt{ab\cdot bc}$$
$$+\sqrt{bc\cdot bc}$$

oder:

$$= -\sqrt{a^2b^2}-\sqrt{ab^2c}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{b^2c^2}$$

oder:

$$= -ab+bc \quad \text{(vergl. Anmerkung 3)}$$
$$= b(c-a) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

m) $\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$
$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$

m) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$$
$$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$$
$$= -18\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-56}+16\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-56}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-56}+$$
$$12\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-56}+27\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-224}-24\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-224}+$$
$$9\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-224}-18\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-224}$$
$$= -18\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 56}\right)+16\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 56}\right)-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 56}\right)+$$
$$12\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 56}\right)+27\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 224}\right)-24\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 224}\right)+$$
$$9\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 224}\right)-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 224}\right) \quad \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$
$$= +18\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{49}+6\cdot\sqrt{8}-$$
$$12\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{64}+24\cdot\sqrt{196}-$$
$$9\cdot\sqrt{32}+18\cdot\sqrt{8}$$
$$= +18\cdot 4-16\cdot 7-27\cdot 8+24\cdot 14 \quad \text{(s. Erkl. 38)}$$
$$= +72-112-216+336$$
$$= +80$$

Erkl. 38. Man erhält für:

$$6\cdot\sqrt{8} = 6\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 6\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 12\cdot\sqrt{2}$$
(nach Erkl. 9)
$$9\cdot\sqrt{32} = 9\cdot\sqrt{16\cdot 2} = 9\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$
$$18\cdot\sqrt{8} = 18\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 18\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 10. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(-a\cdot\sqrt{-a})\cdot(+a\cdot\sqrt{-a})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, b).

b) $x^2 z^4 \cdot \sqrt{-\frac{xy^3}{z^5}} \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}}$

b) Man wende zunächst den in der Antwort auf Frage 8 aufgeführten Satz an und verfahre hierauf nach den Erkl. 9 und 31.

c) $(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-60}) - (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-10})$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, f).

d) $\left(1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}}\right) \cdot (-6 \cdot \sqrt{-9})$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, i).

e) $(\sqrt{-xy^2} + \sqrt{-y^2 z}) \cdot (\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-y^2 z})$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, l) unter Berücksichtigung der Erkl. 9 und 37.

f) $(\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15}) \cdot (-\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15})$

f) Ausrechnung nach Erkl. 36 durchzuführen.

g) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-48} - \sqrt{-60})$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, k).

h) $(7 \cdot \sqrt{-5} + 6 \cdot \sqrt{-3}) \cdot (2 \cdot \sqrt{-125} - 5 \cdot \sqrt{-27}) \cdot (3 \cdot \sqrt{-1} + 4 \cdot \sqrt{-2})$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern miteinander, wie in Aufgabe 9, k) gezeigt wurde. Hierauf vereinige man die gleichnamigen Glieder. Sodann multipliziere man die resultierenden Glieder mit der dritten Klammer und vereinige schliesslich das Gleichnamige.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 12. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln durch einander dividiert?

Antwort. Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Erkl. 38 a. Nach der Divisionsregel ist, wenn $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ berechnet werden soll, der Faktor zu suchen, welcher mit $\sqrt{-b}$ zu multiplizieren ist, um $\sqrt{-a}$ hervorzubringen. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, denn man erhält:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = \sqrt{-a}$$

Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot 1$$

(nach Erkl. 19)

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (nach Erkl. 31)

(siehe Erkl. 38 a)

Frage 13. Was erhält man bei der Division zweier imaginären Zahlen, wenn:

a) der Dividendus eine imaginäre und der Divisor eine reelle Quadratwurzel,

Antwort.

a) Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{+b} = i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) der Dividendus eine reelle und der Divisor eine imaginäre Quadratwurzel

ist?

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{-1}$$

(nach Erkl. 31)

$$= i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) Behauptung.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{-1})^2}$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

und

$$\sqrt{-1} = i$$

folglich gibt:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\cdot\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(nach den Erkl. 18 und 31)

Aus den beiden Entwicklungen folgt der Satz:

„Der Quotient aus einer imaginären und einer reellen Quadratwurzel ist imaginär und zwar positiv, wenn der Dividendus imaginär ist, und negativ, wenn derselbe reell ist."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 11. Was erhält man für:

a) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}}$?

b) $\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}}$?

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 13, a) ist:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{a}} = i\cdot\sqrt{1} \text{ (nach Erkl. 19)}$$

$$= i$$

b) Nach der Antwort auf Frage 13, b) ist:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Wird $b = a$, so folgt:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}} = -i \cdot \sqrt{\frac{a}{a}} = -i\sqrt{1} = -i$$

c) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}$?

c) $$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}} = 1$$

(Folgt auch direkt aus der Erkl. 19)

Aufgabe 12. Nachstehende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(-3\sqrt{-96}) : (-2 \cdot \sqrt{-6})$

b) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \dfrac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}}$

Erkl. 39. Zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliziert.

c) $\dfrac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \dfrac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}$

Auflösungen.

a) Nach Erkl. 18 und Antwort auf Frage 12 gibt:

$$\frac{-3 \cdot \sqrt{-96}}{-2 \cdot \sqrt{-6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{96}{6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{16}$$

$$= +\frac{3}{2} \cdot 4 = +6$$

b) Nach Erkl. 39 und 9 ist:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \frac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-5} \cdot 5 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \sqrt{-12}}$$

$$= \frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}}$$

Nun ist:

$$\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-72}} = \sqrt{\frac{50}{72}}$$

(nach Antwort auf Frage 12)

oder:

$$= \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Folglich ist:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}} = \frac{10 \cdot 5}{12 \cdot 6} = \frac{25}{36}$$

c) $$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \frac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d}},$$

(nach Erkl. 39)

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{-cd} \cdot \sqrt{-a^3b^5} = -\sqrt{a^3b^5cd} \\ \text{und} \\ \sqrt{-ab} \cdot \sqrt{-c^3d^5} = -\sqrt{abc^3d^5} \end{array}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$

also gibt:

$$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}} = \frac{-abcd^2 \cdot \sqrt{a^3b^5cd}}{-a^2bcd \cdot \sqrt{abc^3d^5}}$$

$$= +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^3b^5cd}{abc^3d^5}} = +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{c^2d^4}} = +\frac{ab^2d}{acd^2} = \frac{b^2}{cd}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

d) $\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$

d) Nach Erkl. 40 erhält man für:

$$\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$$

$$=\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-8}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-8}}$$

oder;

$$=\sqrt{\frac{2}{8}}-\sqrt{\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{18}{8}}$$

(siehe Antwort auf Frage 12)

oder:

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=1\frac{3}{4}$$

Erkl. 40. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird durch eine eingliederige dividiert, indem man jedes Glied der Klammer durch den Divisor dividiert.

e) $(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180}):(-2\cdot\sqrt{-5})$

e) Es ist:

$$\frac{(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180})}{(-2\cdot\sqrt{-5})}$$

$$=\frac{14\cdot\sqrt{-20}}{-2\cdot\sqrt{-5}}+\frac{15\cdot\sqrt{45}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{16\cdot\sqrt{-245}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{18\cdot\sqrt{180}}{-2\cdot\sqrt{-5}}$$

(nach Erkl. 40)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{\frac{20}{5}}-7\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{45}{5}}\cdot(-i)+8\cdot\sqrt{\frac{245}{5}}+9\cdot\sqrt{\frac{180}{5}}\cdot(-i)$$

(siehe die Antworten auf die Fragen 12 und 13 und Erkl. 18)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{4}+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{9}+8\cdot\sqrt{49}-9i\sqrt{36}$$

$$=-7\cdot 2+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot 3+8\cdot 7-9\cdot i\cdot 6$$

$$=-14+22\frac{1}{2}i+56-54i$$

$$=+42-31\frac{1}{2}i$$

f) $\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right):\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

f) Nach Erkl. 40 gibt:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}=$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}-\frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

Führt man die Division mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 13, a) aufgeführten Regel und der Erkl. 17 und 39 aus, so erhält man:

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{96\cdot 5}{125\cdot 6}}\cdot i + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i$$

d. i.:

$$= -3i\cdot\frac{5}{6} - 2i\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{2}i\cdot 1$$

$$= -\frac{5}{1}i - \frac{8}{5}i + \frac{5}{2}i$$

$$= -1\frac{3}{5}i$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Es sind folgende Divisionen auszuführen:

a) $(8\cdot\sqrt{-72}):\left(-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $(-xy^2\cdot\sqrt{-z^3}):(-x^2y\cdot\sqrt{z})$

c) $\dfrac{4\cdot\sqrt{+3}}{5\cdot\sqrt{-2}}:\dfrac{2\cdot\sqrt{-8}}{3\cdot\sqrt{+27}}$

d) $\left(\sqrt{-8}-\sqrt{+8}+\sqrt{-\frac{1}{8}}-\sqrt{+\frac{1}{8}}\right):\sqrt{-2}$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{-12}-6\cdot\sqrt{-27}+7\cdot\sqrt{-108}-8\cdot\sqrt{-75})}{(-2\cdot\sqrt{3})}$

f) $\left(\frac{7}{8}\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{7}{12}\cdot\sqrt{-1\frac{1}{2}}\right):\left(-\frac{5}{42}\cdot\sqrt{-2\frac{2}{3}}\right)$

Erkl. 41. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem Nenner des Bruches multipliziert und durch den Zähler desselben dividiert.

Erkl. 41a. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Nenner mit derselben multipliziert.

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, a) unter Berücksichtigung der Erkl. 18 und 41 und der Antwort auf Frage 12.

b) Auflösung mit Hilfe der Erkl. 18 und der Antwort auf Frage 13, a) zu vollführen.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, b) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, d) unter Berücksichtigung von Erkl. 41a.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, e) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13, a).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, f) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 12 und 13.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 14. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n$

b) $m = 4n+2$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n} = (\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}\cdot i^{4n}$$

Erkl. 42. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor potenziert."

In Zeichen:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

Nun ist:

$$i^{4n} = +1$$

[nach Formel 1) des Formelverzeichnisses]

folglich:

$$a^{4n} \cdot i^{4n} = +a^{4n}$$

oder:

$$= +a^m$$

Ist $m = 4n + 2$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n+2} = (\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+2} = a^{4n+2} \cdot i^{4n+2}$$

und, da $i^{4n+2} = -1$ ist

[nach Formel 3) des Formelverzeichnisses]

so folgt:

$$a^{4n+2} \cdot i^{4n+2} = -a^{4n+2}$$

oder:

$$= -a^m$$

In Worten:

„Alle geraden Potenzen einer imaginären Zahl sind reell und positiv, wenn der Potenzexponent durch 4 ohne Rest teilbar ist; jedoch negativ, wenn dies nicht der Fall ist."

Frage 15. Was erhält man für die geraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Potenzexponent m negativ und

a) $m = 4n$
b) $m = 4n + 2$

ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Ist $m = 4n$, so erhält man nach der vorigen Antwort:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^{4n}} = \frac{1}{+a^{4n}}$$

oder:

$$= \frac{1}{a^m}$$

Ist $m = 4n + 2$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^{4n+2}}$$

(nach der Antwort auf Frage 14)

$$= -\frac{1}{a^{4n+2}}$$

oder:

$$= -\frac{1}{a^m}$$

Frage 16. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n + 1$
b) $m = 4n + 3$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n + 1$, so ist:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n+1} = (\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i^{4n+1}$$

Nun ist:

$$i^{4n+1} = +i \text{ [nach Formel 2)]}$$

folglich ist:

$$a^{4n+1} \cdot i^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i$$

oder:

$$= a^m \cdot i$$

Ist $m = 4n + 3$, so erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m = a^{4n+3} \cdot i^{4n+3}$$

und, da $i^{4n+3} = +i$ ist [nach Formel 4)] so folgt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = -a^m \cdot i$$

In Worten:

„Alle ungeraden Potenzen einer imaginären Zahl sind imaginär und positiv, wenn der Potenzexponent, durch 4 geteilt, den Rest 1, negativ, wenn er den Rest 3 lässt.“

Frage 17. Was erhält man für die ungeraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Exponent negativ ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Für $m = 4n + 1$ gibt:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{a^m \cdot i} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

Nun ist:

$$\frac{1}{i} = -i \text{ [nach Antwort a) auf Frage 4]}$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = -\frac{1}{a^m} \cdot i = -\frac{i}{a^m}$$

Für $m = 4n + 3$ ist:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^m \cdot i} = -\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

oder:

$$= -\frac{1}{a^m} \cdot (-i) = +\frac{i}{a^m}$$

Frage 18. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Zahlen berechnen?

Antwort. Bezeichnet man den reellen Faktor der imaginären Zahl mit r und mit n eine positive ganze Zahl, so erhält man:

1) $(r \cdot i)^{4n} = r^{4n}$

2) $(r \cdot i)^{4n+1} = r^{4n+1} \cdot i$

3) $(r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2}$
4) $(r\cdot i)^{4n+3} = -r^{4n+3}\cdot i$
5) $(r\cdot i)^{-4n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{4n}$
6) $(r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\frac{i}{r^{4n+1}}$
7) $(r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\frac{1}{r}\right)^{4n+2}$
8) $(r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\frac{i}{r^{4n+3}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich ohne weiteres aus den vorstehenden Antworten.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 14. Es sind mit Hilfe der in Antwort auf Frage 18 aufgeführten Formeln die nachfolgenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-5})^4$ e) $(\sqrt{-3})^{-8}$
b) $(\sqrt{-5})^5$ f) $(\sqrt{-3})^{-9}$
c) $(\sqrt{-5})^6$ g) $(\sqrt{-3})^{-10}$
d) $(\sqrt{-5})^7$ h) $(\sqrt{-3})^{-11}$

Erkl. 43. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert."

In Zeichen: $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Erkl. 43a. Eine Potenz mit einem Bruchexponenten (sog. Bruchpotenz) ist eine andere Form für eine Potenz unter einer Wurzel, z. B.:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = 5$$
$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} = \sqrt{216}$$

Erkl. 43b. Man erhält nach den beiden vorstehenden Erklärungen für:

$$(\sqrt{-5})^5 = +(\sqrt{5})^5\cdot i^5 = 5^{\frac{5}{2}}\cdot i$$
$$= 5^2\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{-5})^7 = +(\sqrt{5})^7\cdot i^7 = 5^{\frac{7}{2}}\cdot(-i)$$
$$= -5^3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{3})^9 = 3^{\frac{9}{2}} = 3^4\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 81\cdot\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{3})^{11} = 3^{\frac{11}{2}} = 3^5\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 243\cdot\sqrt{3}$$

Auflösung.

a) $(\sqrt{-5})^4 = (\sqrt{5}\cdot i)^4 = (\sqrt{5})^4$ [nach Formel 1), $n = 1$ gesetzt].

Also gibt:

$$(\sqrt{-5})^4 = 5^2 \text{ (nach Erkl. 43)} = 25$$

b) $(\sqrt{-5})^5 = (\sqrt{-5})^{4\cdot 1+1}$
$= (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+1}$

also nach Formel 2):

$$= (\sqrt{5})^5\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

c) $(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+2}$

demnach nach Formel 3):

$$= -(\sqrt{5})^6 = -5^3 \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= -125$$

d) $(\sqrt{-5})^7 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+3}$

also nach Formel 4):

$$= -(\sqrt{5})^7\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

e) $(\sqrt{-3})^{-8} = (\sqrt{-3})^{-4\cdot 2}$

demnach nach Formel 5), $n = 2$ gesetzt:

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \frac{1^8}{3^4} \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= \frac{1}{81}$$

f) $(\sqrt{-3})^{-9} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+1)}$
$= (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+1)}$

also nach Formel 6):

$$= -\frac{i}{(\sqrt{3})^9} = -\frac{i}{81\sqrt{3}}$$
(siehe Erkl. 34b).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $(\sqrt{-3})^{-10} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+2)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+2)}$

demnach nach Formel 7):

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} = -\frac{1}{3^5} \text{ (nach Erkl. 43)}$$

$$= -\frac{1}{243}$$

h) $(\sqrt{-3})^{-11} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+3)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+3)}$

also nach Formel 8):

$$= +\frac{i}{(\sqrt{3})^{11}} = +\frac{i}{243\sqrt{3}}$$

(siehe Erkl. 43 b).

Aufgabe 15. Nachfolgende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

Erkl. 44. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Ein Bruch wird potenziert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner potenziert."

In Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Umgekehrt ist:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Erkl. 45. Werden Wurzeln mit gleichem Exponenten und gleichem Radikandus so oft miteinander multipliziert, als der Exponent Einheiten besitzt, so erhält man den Radikandus; z. B.:

$$\sqrt[2]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[2]{\frac{b}{c}} = \sqrt[2]{\frac{b^2}{c^2}} \text{ (nach Erkl. 9)} = \frac{b}{c}$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

Erkl. 45 a. Nach den Erkl. 43 und 44 ist:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{b^3\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{b^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^2\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{c^2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Auflösung. a) Der Faktor:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

oder:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+3}$$

folglich nach Formel 17) des Formelverzeichnisses:

$$= a^7\cdot\left[-\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7\cdot i\right]$$

oder:

$$= -a^7\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Der Faktor:

$$\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

oder:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+1}$$

folglich nach Formel 15):

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5\cdot i$$

oder:

$$= -a^5\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot i\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Mithin erhält man für:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{a^7 b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\cdot\left(-\frac{a^5 b^2}{c^2}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$$

$$= +\frac{a^{12} b^5}{c^5}\cdot i^2\cdot\frac{b}{c} \text{ (nach d. Erkl. 18 a, 23 u. 45)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder:

$$= -\frac{a^{12} b^6}{c^6}$$

weil $i^2 = -1$ ist.

b) $\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$

b) Der erste Faktor:

$$\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

gibt nach Erkl. 42 und Antwort auf Frage 2

$$= +3^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot i^3$$

oder:

$$= +27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (-i)$$

(nach Erkl. 43)

d. i.:

$$= -9i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Der zweite Faktor:

$$\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$$

ist nach Formel 15) des Formelverzeichnisses:

$$= -2^5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 \cdot i \quad (\text{denn } 5 = 4 \cdot 1 + 1)$$

oder:

$$= -32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \quad (\text{nach Erkl. 43})$$

d. i.:

$$= -8i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Mithin gibt:

$$\left(+3\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(-9i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(-8i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = +72i^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(nach den Erkl. 9 und 18a)

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= -72\sqrt{\frac{1}{6}}$$

c) $\dfrac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5}$

Erkl. 46. Es gibt:

$$(\sqrt{a^2b^3})^7 = \left(a^{\frac{2}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^7 = a^{\frac{14}{2}} \cdot b^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{a^{14}b^{21}}$$

$$(\sqrt{a^3b^2})^5 = \left(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{2}}\right)^5 = a^{\frac{15}{2}} \cdot b^{\frac{10}{2}} = \sqrt[2]{a^{15}b^{10}}$$

c) Man erhält für:

$$\frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5} = \frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^{4\cdot 1+3}}{(+\sqrt{-a^3b^2})^{4\cdot 1+3}}$$

oder nach den Formeln 17) bezw. 15):

$$= \frac{-[-(\sqrt{a^2b^3})^7 \cdot i]}{+[(\sqrt{a^3b^2})^5 \cdot i]} = \frac{+i\sqrt{a^{14}b^{21}}}{+i\sqrt{a^{15}b^{10}}}$$

(siehe Erkl. 46)

oder:

$$= \sqrt{\frac{a^{14}b^{21}}{a^{15}b^{10}}} = \sqrt{\frac{b^{11}}{a}} = b^5 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$$

d) $\dfrac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \dfrac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2}$

Erkl. 47. Man erhält für:

$$(\sqrt{-8})^4 = (\sqrt{8})^4 \cdot i^4 = 8^2 \cdot 1 = +64$$

$$(-\sqrt{-2})^2 = (-\sqrt{2} \cdot i)^2 = (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$$

d) Nach Erkl. 39 ist:

$$\frac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \frac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2} = \frac{(\sqrt{-8})^4 \cdot (-\sqrt{-2})^2}{(-\sqrt{-3})^3 \cdot (\sqrt{-12})^5} = \frac{(\sqrt{8})^2 \cdot (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1)}{i(\sqrt{3})^3 \cdot i \cdot (\sqrt{12})^5} = \frac{64 \cdot 2 \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 288 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2} \quad \text{(s. Erkl. 47)}$$

oder:

$$= \frac{-64 \cdot 2}{-3 \cdot 288 \cdot 3} \quad \left\} \text{ [nach Erkl. 45 und Antw. auf Frage 4, c)]} \right.$$

oder:

$$= +\frac{4}{81}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Es sind mit Hilfe der Formeln 14) bis 21) des Formelverzeichnisses die nachstehenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-2})^{12}$ e) $(\sqrt{-6})^{-4}$
b) $(\sqrt{-2})^{13}$ f) $(\sqrt{-6})^{-5}$
c) $(\sqrt{-2})^{14}$ g) $(\sqrt{-6})^{-6}$
d) $(\sqrt{-2})^{15}$ h) $(\sqrt{-6})^{-7}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 14, a) bis 14, h).

Aufgabe 17. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7 : \left(-a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

b) $\left(+4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{8}}\right)^5$

c) $(+a \cdot \sqrt{-ab^3})^3 \cdot (-b \cdot \sqrt{-a^3b})^4$

d) $\dfrac{(-3 \cdot \sqrt{-2})^8}{(+2 \cdot \sqrt{-3})^6}$

e) $\dfrac{(\sqrt{-5})^2}{(-\sqrt{-3})^5} : \dfrac{(-\sqrt{-27})^3}{(\sqrt{-2})^4}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, c).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, b).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, a).

d) Man bringe Zähler und Nenner des gegebenen Bruches für sich allein auf die kürzeste Form und führe hierauf erst die Division aus.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, d).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg