Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Wird $m = 0$, so erhält man:

$$a^{m-n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

Es ist also:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

In Worten:

„Die Minuspotenz (d. h. die Potenz mit negativem Exponenten) ist das Umgekehrte der Pluspotenz (d. h. der Potenz mit positivem Exponenten).

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

$$i^{4n+2} = i^{4\cdot(-2)+2} = i^{-6}$$
$$= \frac{1}{i^6} = \frac{1}{-1} = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4\cdot(-2)+3} = i^{-5}$$
$$= \frac{1}{i^5} = \frac{1}{+i} = -i$$

und so fort.

Hieraus ergibt sich folgender Satz:

„Die Potenzen der imaginären Einheit — sowohl die mit positiven, als auch die mit negativen Exponenten — kehren stets weder."

Die Periode ist:

$$+1; \quad +i; \quad -1; \quad -i$$

Andere Werte, als die vorstehenden, können sich bei keiner Potenz von i ergeben.

---

a) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 5. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

a) $(\sqrt{-1})^{24}$

b) i^{89}

c) $(-\sqrt{-1})^{126}$

Auflösungen.

a) Der Exponent 24 lässt sich durch 4 ohne Rest teilen, denn $24 = 4\cdot 6$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{24} = i^{4\cdot 6}$$

oder allgemein:

$$= i^{4\cdot n}$$

Nach Formel 1) (Frage 5) ist:

$$i^{4n} = +1$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-1})^{24} = +1$$

b) Der Exponent 89 gibt, durch 4 geteilt, den Quotient 22 und den Rest $+1$. Man erhält demnach für:

$$i^{89} = i^{4\cdot 22+1}$$

oder allgemein:

$$= i^{4n+1}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{89} = +i$$

c) Der Exponent 126, durch 4 geteilt, gibt den Quotient 31 und den Rest $+2$. Man kann also schreiben für:

$$(-\sqrt{-1})^{126} = (-\sqrt{-1})^{4\cdot 31+2}$$

oder allgemein:

$$(-i)^{126} = (-i)^{4n+2}$$

Nach Formel 3) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+2} = -1$$

folglich ist:

$$(-i)^{126} = -1$$

Erkl. 25. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ."

denn das Resultat ändert sich nicht, wenn i negativ ist, weil der Potenzexponent eine gerade Zahl ist (siehe Erkl. 25).

---

d) $(-i)^{163}$

d) Der Exponent 163 lässt sich zerlegen in: $4 \cdot 40 + 3$. Folglich ist:

$$(-i)^{163} = (-i)^{4 \cdot 40 + 3}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{4n+3}$$

Nach Formel 4) (Frage 5) gibt:

$$i^{4n+3} = -i$$

Da die Grundzahl der gegebenen Potenz negativ und der Exponent eine ungerade Zahl ist, so erhält man (nach Erkl. 25) für:

$$(-i)^{163} = -(-i) = +i$$

---

e) $(\sqrt{-1})^{-20}$

e) Der Exponent -20 lässt sich zerlegen in: $-4 \cdot 5$. Man erhält also für:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = i^{-4 \cdot 5}$$

oder allgemein:

$$= i^{-4n}$$

Nun ist:

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$i^{4n} = +1 \quad \text{[nach Formel 1), Frage 5]}$$

folglich gibt:

$$(\sqrt{-1})^{-20} = \frac{1}{+1} = +1$$

---

f) $(-i)^{-39}$

f) Der Exponent 39 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 9 und zum Rest $+3$. Man erhält hiernach für:

$$(-i)^{-39} = (-i)^{-(4 \cdot 9 + 3)}$$

oder allgemein:

$$= (-i)^{-(4n+3)}$$

$$= \frac{1}{(-i)^{4n+3}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nun ist:

$$i^{4n+3} = -i \quad \text{[nach Formel 4), Frage 5]}$$

und

$$(-i)^{4n+3} = -(-i) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

folglich ist:

$$(-i)^{-39} = \frac{1}{-(-i)} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

g) $(\sqrt{-1})^{-30}$

g) Der Exponent 30 gibt, durch 4 geteilt, zum Quotienten 7 und zum Rest $+2$. Man erhält demnach für:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = (\sqrt{-1})^{-(4 \cdot 7 + 2)}$$

oder allgemein:

$$= (\sqrt{-1})^{(-4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}}$$

Nun ist:

$i^{4n+2} = -1$ [nach Formel 3), Frage 5]

folglich:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = \frac{1}{-1} = -1$$

---

h) i^{-97}

h) Dividiert man den Exponenten 97 durch 4, so erhält man 24 zum Quotienten und $+1$ zum Rest. Man kann also schreiben für:

$$i^{-97} = i^{-(4 \cdot 24+1)}$$

oder allgemein:

$$= i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{-97} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

	Andeutungen.
a) $(+\sqrt{-1})^{16}$	a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, a).
b) i^{45}	b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, b).
c) $(-\sqrt{-1})^{62}$	c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, c).
d) $(-i)^{87}$	d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, d).
e) i^{-12}	e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, e).
f) $(-i)^{-17}$	f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, h).
g) $(+\sqrt{-1})^{-54}$	g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, g).
h) $(-\sqrt{-1})^{-103}$	h) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, f).

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen.

Anmerkung 4. Das Symbol $\sqrt{-a}$ stellt sowohl eine positive, als auch eine negative imaginäre Zahl dar (siehe Antwort auf Frage 2 und Erkl. 10). Um das Verständnis der nachfolgenden Gesetze zu erleichtern und die Rechnung einfacher zu gestalten, soll im Folgenden immer nur ein Wert Berücksichtigung finden und zwar, wenn vor der imaginären Zahl kein Vorzeichen oder das Zeichen $+$ steht, nur der positive, und wenn vor derselben das Zeichen $-$ steht, nur der negative Wert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg