Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

oder allgemein:

$$= (\sqrt{-1})^{(-4n+2)} = \frac{1}{i^{4n+2}}$$

Nun ist:

$i^{4n+2} = -1$ [nach Formel 3), Frage 5]

folglich:

$$(\sqrt{-1})^{-30} = \frac{1}{-1} = -1$$

---

h) i^{-97}

h) Dividiert man den Exponenten 97 durch 4, so erhält man 24 zum Quotienten und $+1$ zum Rest. Man kann also schreiben für:

$$i^{-97} = i^{-(4 \cdot 24+1)}$$

oder allgemein:

$$= i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

Nach Formel 2) (Frage 5) ist aber:

$$i^{4n+1} = +i$$

folglich gibt:

$$i^{-97} = \frac{1}{+i} = -i$$

[nach Antwort a) auf Frage 4]

---

b) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 6. Man soll nachstehende Ausdrücke auf die einfachste Form bringen:

	Andeutungen.
a) $(+\sqrt{-1})^{16}$	a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, a).
b) i^{45}	b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, b).
c) $(-\sqrt{-1})^{62}$	c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, c).
d) $(-i)^{87}$	d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, d).
e) i^{-12}	e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, e).
f) $(-i)^{-17}$	f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, h).
g) $(+\sqrt{-1})^{-54}$	g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, g).
h) $(-\sqrt{-1})^{-103}$	h) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 5, f).

3) Ueber das Rechnen mit imaginären Zahlen.

Anmerkung 4. Das Symbol $\sqrt{-a}$ stellt sowohl eine positive, als auch eine negative imaginäre Zahl dar (siehe Antwort auf Frage 2 und Erkl. 10). Um das Verständnis der nachfolgenden Gesetze zu erleichtern und die Rechnung einfacher zu gestalten, soll im Folgenden immer nur ein Wert Berücksichtigung finden und zwar, wenn vor der imaginären Zahl kein Vorzeichen oder das Zeichen $+$ steht, nur der positive, und wenn vor derselben das Zeichen $-$ steht, nur der negative Wert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 6. Wie werden imaginäre Zahlen addiert?

Antwort. Imaginäre Zahlen werden addiert, indem man die algebraische Summe ihrer reellen Faktoren mit der imaginären Einheit multipliziert.

Behauptung.

$$\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$

Beweis. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-a}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\\ \text{und}\quad \sqrt{-b}&=\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 2)}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\\ &=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}$$

(nach Erkl. 26)

Erkl. 26. Wenn die Glieder einer Summe einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so kann man jedes dieser Glieder durch diesen Faktor dividieren, die Quotienten algebraisch addieren, sie in eine Klammer setzen und letztere mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizieren; z. B.:

$$\begin{aligned}81a^4-54a^2&=\left(\frac{81a^4}{27a^2}-\frac{54a^2}{27a^2}\right)\cdot 27a^2\\ &=(3a^2-2)\cdot 27a^2\end{aligned}$$

denn umgekehrt gibt:

$$(3a^2-2)\cdot 27a^2=81a^4-54a^2$$

Erkl. 27. Wenn man die Zweideutigkeit der Wurzeln berücksichtigt, so erhält man für $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$ nicht weniger als vier verschiedene Lösungen, nämlich wenn der aus $\sqrt{a}$ resultierende absolute Wert mit r und der aus $\sqrt{b}$ resultierende mit r_1 bezeichnet wird, die folgenden:

1) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r+r_1)\cdot i$

2) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r+r_1)\cdot i$

3) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r-r_1)\cdot i$

4) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r-r_1)\cdot i=-(r+r_1)\cdot i$

(Siehe die beiden folgenden Erkl. 28 u. 28a).

Erkl. 28. Der Satz von der Auflösung der Klammern lautet:

„Gleiche Zeichen vor und in der Klammer geben +, ungleiche —."

Erkl. 28a. Es ist üblich, das Rechnungszeichen der Summe (+) fortzulassen und die Glieder nur mit ihren Vorzeichen aneinanderzureihen, also statt: $(+\sqrt{a})+(-\sqrt{b})$ zu schreiben: $+\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Erkl. 29. Sind mehrere imaginäre Zahlen positiv und mehrere negativ, so hat man zuerst alle positiven, dann alle negativen Zahlen für sich zu addieren und schliesslich die beiden Summen nach der in der Antwort auf Frage 6 gegebenen Regel zu vereinigen.

Frage 7. Wie wird eine imaginäre Zahl von einer andern subtrahiert?

Antwort. Eine imaginäre Zahl wird von einer andern subtrahiert, indem man

Erkl. 30. Die für das Rechnen mit reellen Zahlen aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf die imaginären Zahlen anwenden, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen. Da die imaginären Zahlen aus der imaginären Einheit in gleicher Weise entstehen wie die reellen Zahlen aus der reellen Einheit, so lassen sich auch die imaginären Zahlen zu einander addieren und von einander subtrahieren.

sie zu letzterer mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

In Zeichen:

$$\sqrt{-a}-(+\sqrt{-b})=\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$$
(nach Erkl. 28)

$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(nach Erkl. 26)

und

$$\sqrt{-a}-(-\sqrt{-b})=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$$
$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(siehe Erkl. 30)

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})$

Auflösung. a) Man erhält:

$$(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})=(+\sqrt{256}\cdot\sqrt{-1})+(\sqrt{729}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{196}\cdot\sqrt{-1})$$
$$=(+16i)+(+27i)+(-11i)+(-14i)$$
$$=(16+27-11-14)i=+18i$$

---

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)$

b) $$\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)=\left(+\sqrt{\frac{16a^4}{25b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)-\left(-\sqrt{\frac{36a^4}{49b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)=+\frac{4a^2}{5b}\cdot i+\frac{6a^2}{7b}\cdot i$$ (nach Erkl. 31)

oder:

$$=\frac{58a^2i}{35b}$$ (nach Erkl. 26)

---

c) $2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}$

Erkl. 31. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Die $n$te Wurzel aus einem Bruche ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzel des Zählers durch die $n$te Wurzel des Nenners."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Es ist:

$$2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}=2\cdot\sqrt{96}\cdot\sqrt{-1}-3\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{-1}+5\cdot\sqrt{216}\cdot\sqrt{-1}-7\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{-1}$$

oder, indem man die Radikanden der reellen Wurzeln soweit in Faktoren zerlegt, dass sich wenigstens teilweise die Wurzel ziehen lässt, und für $\sqrt{-1}=i$ setzt:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{16\cdot 6}-3\cdot i\cdot\sqrt{4\cdot 6}+5\cdot i\cdot\sqrt{36\cdot 6}-7\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 6}$$

Umgekehrt gibt:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

d) $\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a}$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2 \cdot i \cdot 4 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} - 7 \cdot i \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 8i\sqrt{6} - 6i\sqrt{6} + 30i\sqrt{6} - 21i\sqrt{6} = +11i\sqrt{6}$$

Erkl. 32. Um Faktoren, die vor einer Wurzel stehen, unter dieselbe zu bringen, muss man sie auf den Grad potenzieren, welchen die Wurzel besitzt.

In Zeichen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

d) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-1} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} - 2a \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}\sqrt{-1} + b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

und, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(b \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} - 2ab \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + b \cdot \sqrt{a}\right) \cdot i$$

oder, da: $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$ ist (nach Erkl. 32):

$$= (b \cdot \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + b\sqrt{a}) \cdot i$$

$$= (b - 2 - 2b + b) i \sqrt{a} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

$$= -2i\sqrt{a}$$

---

e) $5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

e) Zunächst gibt:

$$5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{-1} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-1} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= \sqrt{\frac{5^2}{5}} = \sqrt{5} \\ \text{und} \quad 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{5^2}{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \text{(nach Erkl. 32)}$$

Folglich erhält man für:

$$\left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot i - 4\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

oder $= 5i\sqrt{5}$.

---

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot a}{25 \cdot 0{,}2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0{,}3 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5\,d} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \frac{7\,b}{c\,d^3} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} - \frac{90\,a b}{c^2 d^2} + \frac{49\,a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64\,x^4 y^2}{81\,z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100\,x^2}{169\,z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3\,a} \cdot \sqrt{-\frac{9\,a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25\,a^3}{9\,b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

f) $y^4 \cdot \sqrt{-\frac{x^6 y}{z^3}} - x \cdot \sqrt{-\frac{x y^5}{z^5}} - \frac{x^3}{z} \cdot \sqrt{-\frac{y^9}{z}} + y^2 z \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{-\frac{y^3}{x^5}}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, f).

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 8. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln miteinander multipliziert?

Erkl. 33. Die Mathematiker zu Ende des vorigen Jahrhunderts waren darüber im Zweifel, was man unter dem Produkte zweier imaginären Quadratwurzeln zu verstehen habe. Ein Teil von ihnen (z. B. auch Euler) war der Ansicht, dass dieses Produkt gleich einer reellen Grösse, nämlich:

$$= -\sqrt{a \cdot b}$$

wäre; die übrigen (darunter z. B. der englische Mathematiker Emerson) glaubten für:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

setzen zu müssen, weil ein Produkt aus unmöglichen Grössen keine mögliche Grösse geben könnte. (Vergl. Hutton, Mathematical dictionary, 1796.)

Erkl. 33 a. Das Produkt zweier imaginären Zahlen ist gleich dem Produkt der entsprechenden reellen Zahlen. Letzteres Produkt ist positiv, wenn die imaginären Faktoren ungleiche, negativ, wenn sie gleiche Vorzeichen besitzen.

Man erhält also:

$$(+ai) \cdot (+bi) = +abi^2 = -ab$$

und

$$(+ai) \cdot (-bi) = -abi^2 = +ab$$

Antwort. Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der negativen Quadratwurzel aus dem Produkte der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

(nach Antwort auf Frage 4, c)

folglich ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (-1) = -\sqrt{a \cdot b}$$

(vergl. Erkl. 33 a)

Frage 9. Was erhält man für:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}\,?$$

Erkl. 34. Eine Summe von gleichen imaginären Summanden ist gleich einem Produkte aus einer imaginären und einer reellen Zahl.

Man erhält für:

$$(+ai) \cdot b = +ai + ai + ai + \cdots$$
$$= +(a + a + a \cdots)\, i = (ab)\, i$$

und für:

$$(-ai) \cdot b = (-ai) + (-ai) + \cdots$$
$$= -(a + a + a \cdots)\, i = -(ab)\, i$$

Eine Multiplikation mit $-b$ hat dieselbe Bedeutung wie eine Multiplikation mit b und eine Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Demnach ist:

$$(+ai) \cdot (-b) = -(ab)\, i$$

und

$$(-ai) \cdot (-b) = +(ab)\, i$$

Antwort. Das Produkt zweier Quadratwurzeln, von welchen die eine imaginär ist, ist imaginär und gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a \cdot b \cdot (-1)} = \sqrt{-a \cdot b}$$

(oder $= i\sqrt{ab}$) (siehe Erkl. 34).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 10. Was erhält man für:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach vorstehender Antwort ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-a \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = ai$$

Frage 11. Was erhält man für:

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 8 ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -\sqrt{a \cdot a} = -\sqrt{a^2} = -a$$

In Worten:

„Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln mit gleichen Radikanden ist gleich dem negativen Radikandus."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

Auflösung. a) Es ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= -\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= -\sqrt{ab} \cdot (-1) = +\sqrt{ab}$$

b) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

b) Wie vorstehend gezeigt wurde, ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = +\sqrt{a \cdot a}$$
$$= +\sqrt{a^2} = +a$$

c) $-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

c) Es ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (-\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= +\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= +\sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}$$

d) $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

d) Nach vorstehender Lösung ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so ergibt sich:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -\sqrt{aa}$$
$$= -\sqrt{a^2} = -a$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

e) $a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5}$

e) Man erhält für:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot \sqrt{a^5 b^3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{ab^5} \cdot \sqrt{-1}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= a \cdot \sqrt{a^6 b^8} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$\sqrt{a^6 b^8} = a^3 b^4 \text{ und } (\sqrt{-1})^2 = -1$$

folglich ist:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot (-1) = -a^4 b^4$$

f) $-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 8 gibt:

$$\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}} = -\sqrt{7 \cdot 5\frac{1}{7}} = -\sqrt{36} = -6$$

also:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) = -(-6) = +6$$

ferner:

$$+\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}$$
$$= +\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= +\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4\frac{4}{9}} \cdot (\sqrt{-1})^4 = +\sqrt{400} \cdot (+1) = +20$$

(vergleiche Anmerkung 3)

endlich:

$$-\left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = -\left(-\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{128}{7}}\right) = -(-\sqrt{64}) = +8$$

Demnach erhält man für:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = +6 + 20 + 8 = +34$$

g) $\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}}$

g) Der Minuendus:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

gibt nach Absonderung der imaginären Einheit und Vereinigung der reellen Wurzeln:

$$= \sqrt{\frac{a^3 \cdot a^2 \cdot b}{b^2 \cdot b^3 \cdot a}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

der Subtrahendus:

$$= \sqrt{\frac{b^5 \cdot a^2 \cdot a^9}{a^7 \cdot b \cdot b^8}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

Folglich erhält man für:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}} = -\frac{a^2 i}{b^2} - \left(-\frac{a^2 i}{b^2}\right) = 0$$

h) $(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$

h) Nach den Erkl. 18a und 35 gibt:

$$(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$$
$$=2\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-30}+3\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-30}-$$
$$4\cdot\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-30}+5\cdot\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-30}$$

oder:

$$=2\cdot(-\sqrt{150})+3\cdot(-\sqrt{180})-$$
$$4\cdot(-\sqrt{300})+5\cdot(-\sqrt{450})$$

(nach der Antwort auf Frage 8)

oder nach Zerlegung der Radikanden in solche Faktoren, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann:

$$=-2\cdot\sqrt{25\cdot6}-3\cdot\sqrt{36\cdot5}+$$
$$4\cdot\sqrt{100\cdot3}-5\cdot\sqrt{225\cdot2}$$
$$=-2\cdot5\cdot\sqrt{6}-3\cdot6\cdot\sqrt{5}+$$
$$4\cdot10\cdot\sqrt{3}-5\cdot15\cdot\sqrt{2}$$ (nach Erkl. 9)

d. i.:

$$=-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$

(siehe Erkl. 35a)

Erkl. 35. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird mit einer eingliederigen multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit letzterer multipliziert.

Erkl. 35a. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$
$$=-10\cdot2{,}449-18\cdot2{,}236+40\cdot1{,}732-75\cdot1{,}414$$
$$=-24{,}49-40{,}248+69{,}28-106{,}05$$
$$=-101{,}508$$

---

i) $\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$

i) Nach den Erkl. 18b und 35 ist:

$$\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$$
$$=-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{5}\cdot30}\right)+8\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{6}\cdot30}\right)$$
$$-10\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{6}\cdot30}\right)+8\frac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}\cdot30}\right)$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}+10\cdot5-8\frac{1}{3}\cdot6$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}$$ (siehe Erkl. 35b)

Erkl. 35b. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$+6\sqrt{6}-8\sqrt{5}=+6\cdot2{,}449-8\cdot2{,}236$$
$$=-3{,}194$$

---

k) $(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$

k) Multipliziert man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten (siehe Erkl. 36), so erhält man nach der Antwort auf Frage 8 und nach Erkl. 35:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-39}$$
$$=-\sqrt{13\cdot39}-\sqrt{15\cdot39}$$
$$=-13\sqrt{3}-3\sqrt{65}$$ (s. Erkl. 36a)

und wenn man die erste Klammer mit dem zweiten Gliede der zweiten Klammer multipliziert:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\quad\sqrt{-45})$$
$$=-(-\sqrt{13\cdot45})-(-\sqrt{15\cdot45})$$
$$=-(-3\cdot\sqrt{65})-(-15\cdot\sqrt{3})$$
$$=+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$ (s. Erkl. 36a)

Erkl. 36. Zwei mehrgliederige (Klammer-) Grössen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Gliede der anderen multipliziert und das Gleichnamige vereinigt.

Erkl. 36a. Es gibt:

$$\sqrt{13\cdot39}=\sqrt{13\cdot13\cdot3}=\sqrt{13^2\cdot3}=13\cdot\sqrt{3}$$

(nach Erkl. 9)

$$\sqrt{15\cdot39}=\sqrt{3\cdot5\cdot13\cdot3}=\sqrt{3^2\cdot65}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{13\cdot45}=\sqrt{13\cdot9\cdot5}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{15\cdot45}=\sqrt{15\cdot15\cdot3}=\sqrt{15^2\cdot3}=15\cdot\sqrt{3}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Folglich gibt:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$$
$$= -13\sqrt{3}-3\sqrt{65}+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$
$$= +2\sqrt{3}$$

(oder angenähert $= +2\cdot 1{,}732 = 3{,}464$.)

l) $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$

Erkl. 37. Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Erkl. 37a. Schneller gelangt man zum Resultat, wenn man den in Erkl. 37 aufgeführten Satz anwendet. Man erhält:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= (\sqrt{-ab})^2-(\sqrt{-bc})^2$$
$$= (-ab)-(-bc) \quad \text{(nach Erkl. 5)}$$
$$= -ab+bc = b(c-a)$$

l) Nach Erkl. 36 und Antwort auf Frage 8 erhält man:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= -\sqrt{ab\cdot ab}-\sqrt{bc\cdot ab}+\sqrt{ab\cdot bc}$$
$$+\sqrt{bc\cdot bc}$$

oder:

$$= -\sqrt{a^2b^2}-\sqrt{ab^2c}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{b^2c^2}$$

oder:

$$= -ab+bc \quad \text{(vergl. Anmerkung 3)}$$
$$= b(c-a) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

m) $\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$
$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$

m) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$$
$$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$$
$$= -18\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-56}+16\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-56}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-56}+$$
$$12\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-56}+27\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-224}-24\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-224}+$$
$$9\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-224}-18\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-224}$$
$$= -18\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 56}\right)+16\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 56}\right)-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 56}\right)+$$
$$12\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 56}\right)+27\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 224}\right)-24\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 224}\right)+$$
$$9\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 224}\right)-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 224}\right) \quad \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$
$$= +18\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{49}+6\cdot\sqrt{8}-$$
$$12\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{64}+24\cdot\sqrt{196}-$$
$$9\cdot\sqrt{32}+18\cdot\sqrt{8}$$
$$= +18\cdot 4-16\cdot 7-27\cdot 8+24\cdot 14 \quad \text{(s. Erkl. 38)}$$
$$= +72-112-216+336$$
$$= +80$$

Erkl. 38. Man erhält für:

$$6\cdot\sqrt{8} = 6\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 6\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 12\cdot\sqrt{2}$$
(nach Erkl. 9)
$$9\cdot\sqrt{32} = 9\cdot\sqrt{16\cdot 2} = 9\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$
$$18\cdot\sqrt{8} = 18\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 18\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 10. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(-a\cdot\sqrt{-a})\cdot(+a\cdot\sqrt{-a})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, b).

b) $x^2 z^4 \cdot \sqrt{-\frac{xy^3}{z^5}} \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}}$

b) Man wende zunächst den in der Antwort auf Frage 8 aufgeführten Satz an und verfahre hierauf nach den Erkl. 9 und 31.

c) $(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-60}) - (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-10})$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, f).

d) $\left(1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}}\right) \cdot (-6 \cdot \sqrt{-9})$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, i).

e) $(\sqrt{-xy^2} + \sqrt{-y^2 z}) \cdot (\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-y^2 z})$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, l) unter Berücksichtigung der Erkl. 9 und 37.

f) $(\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15}) \cdot (-\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15})$

f) Ausrechnung nach Erkl. 36 durchzuführen.

g) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-48} - \sqrt{-60})$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, k).

h) $(7 \cdot \sqrt{-5} + 6 \cdot \sqrt{-3}) \cdot (2 \cdot \sqrt{-125} - 5 \cdot \sqrt{-27}) \cdot (3 \cdot \sqrt{-1} + 4 \cdot \sqrt{-2})$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern miteinander, wie in Aufgabe 9, k) gezeigt wurde. Hierauf vereinige man die gleichnamigen Glieder. Sodann multipliziere man die resultierenden Glieder mit der dritten Klammer und vereinige schliesslich das Gleichnamige.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 12. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln durch einander dividiert?

Antwort. Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Erkl. 38 a. Nach der Divisionsregel ist, wenn $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ berechnet werden soll, der Faktor zu suchen, welcher mit $\sqrt{-b}$ zu multiplizieren ist, um $\sqrt{-a}$ hervorzubringen. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, denn man erhält:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = \sqrt{-a}$$

Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot 1$$

(nach Erkl. 19)

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (nach Erkl. 31)

(siehe Erkl. 38 a)

Frage 13. Was erhält man bei der Division zweier imaginären Zahlen, wenn:

a) der Dividendus eine imaginäre und der Divisor eine reelle Quadratwurzel,

Antwort.

a) Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{+b} = i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) der Dividendus eine reelle und der Divisor eine imaginäre Quadratwurzel

ist?

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{-1}$$

(nach Erkl. 31)

$$= i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) Behauptung.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{-1})^2}$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

und

$$\sqrt{-1} = i$$

folglich gibt:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\cdot\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(nach den Erkl. 18 und 31)

Aus den beiden Entwicklungen folgt der Satz:

„Der Quotient aus einer imaginären und einer reellen Quadratwurzel ist imaginär und zwar positiv, wenn der Dividendus imaginär ist, und negativ, wenn derselbe reell ist."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 11. Was erhält man für:

a) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}}$?

b) $\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}}$?

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 13, a) ist:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{a}} = i\cdot\sqrt{1} \text{ (nach Erkl. 19)}$$

$$= i$$

b) Nach der Antwort auf Frage 13, b) ist:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Wird $b = a$, so folgt:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}} = -i \cdot \sqrt{\frac{a}{a}} = -i\sqrt{1} = -i$$

c) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}$?

c) $$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}} = 1$$

(Folgt auch direkt aus der Erkl. 19)

Aufgabe 12. Nachstehende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(-3\sqrt{-96}) : (-2 \cdot \sqrt{-6})$

b) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \dfrac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}}$

Erkl. 39. Zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliziert.

c) $\dfrac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \dfrac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}$

Auflösungen.

a) Nach Erkl. 18 und Antwort auf Frage 12 gibt:

$$\frac{-3 \cdot \sqrt{-96}}{-2 \cdot \sqrt{-6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{96}{6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{16}$$

$$= +\frac{3}{2} \cdot 4 = +6$$

b) Nach Erkl. 39 und 9 ist:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \frac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-5} \cdot 5 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \sqrt{-12}}$$

$$= \frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}}$$

Nun ist:

$$\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-72}} = \sqrt{\frac{50}{72}}$$

(nach Antwort auf Frage 12)

oder:

$$= \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Folglich ist:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}} = \frac{10 \cdot 5}{12 \cdot 6} = \frac{25}{36}$$

c) $$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \frac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d}},$$

(nach Erkl. 39)

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{-cd} \cdot \sqrt{-a^3b^5} = -\sqrt{a^3b^5cd} \\ \text{und} \\ \sqrt{-ab} \cdot \sqrt{-c^3d^5} = -\sqrt{abc^3d^5} \end{array}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$

also gibt:

$$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}} = \frac{-abcd^2 \cdot \sqrt{a^3b^5cd}}{-a^2bcd \cdot \sqrt{abc^3d^5}}$$

$$= +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^3b^5cd}{abc^3d^5}} = +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{c^2d^4}} = +\frac{ab^2d}{acd^2} = \frac{b^2}{cd}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

d) $\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$

d) Nach Erkl. 40 erhält man für:

$$\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$$

$$=\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-8}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-8}}$$

oder;

$$=\sqrt{\frac{2}{8}}-\sqrt{\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{18}{8}}$$

(siehe Antwort auf Frage 12)

oder:

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=1\frac{3}{4}$$

Erkl. 40. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird durch eine eingliederige dividiert, indem man jedes Glied der Klammer durch den Divisor dividiert.

e) $(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180}):(-2\cdot\sqrt{-5})$

e) Es ist:

$$\frac{(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180})}{(-2\cdot\sqrt{-5})}$$

$$=\frac{14\cdot\sqrt{-20}}{-2\cdot\sqrt{-5}}+\frac{15\cdot\sqrt{45}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{16\cdot\sqrt{-245}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{18\cdot\sqrt{180}}{-2\cdot\sqrt{-5}}$$

(nach Erkl. 40)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{\frac{20}{5}}-7\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{45}{5}}\cdot(-i)+8\cdot\sqrt{\frac{245}{5}}+9\cdot\sqrt{\frac{180}{5}}\cdot(-i)$$

(siehe die Antworten auf die Fragen 12 und 13 und Erkl. 18)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{4}+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{9}+8\cdot\sqrt{49}-9i\sqrt{36}$$

$$=-7\cdot 2+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot 3+8\cdot 7-9\cdot i\cdot 6$$

$$=-14+22\frac{1}{2}i+56-54i$$

$$=+42-31\frac{1}{2}i$$

f) $\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right):\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

f) Nach Erkl. 40 gibt:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}=$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}-\frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

Führt man die Division mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 13, a) aufgeführten Regel und der Erkl. 17 und 39 aus, so erhält man:

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{96\cdot 5}{125\cdot 6}}\cdot i + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i$$

d. i.:

$$= -3i\cdot\frac{5}{6} - 2i\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{2}i\cdot 1$$

$$= -\frac{5}{1}i - \frac{8}{5}i + \frac{5}{2}i$$

$$= -1\frac{3}{5}i$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Es sind folgende Divisionen auszuführen:

a) $(8\cdot\sqrt{-72}):\left(-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $(-xy^2\cdot\sqrt{-z^3}):(-x^2y\cdot\sqrt{z})$

c) $\dfrac{4\cdot\sqrt{+3}}{5\cdot\sqrt{-2}}:\dfrac{2\cdot\sqrt{-8}}{3\cdot\sqrt{+27}}$

d) $\left(\sqrt{-8}-\sqrt{+8}+\sqrt{-\frac{1}{8}}-\sqrt{+\frac{1}{8}}\right):\sqrt{-2}$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{-12}-6\cdot\sqrt{-27}+7\cdot\sqrt{-108}-8\cdot\sqrt{-75})}{(-2\cdot\sqrt{3})}$

f) $\left(\frac{7}{8}\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{7}{12}\cdot\sqrt{-1\frac{1}{2}}\right):\left(-\frac{5}{42}\cdot\sqrt{-2\frac{2}{3}}\right)$

Erkl. 41. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem Nenner des Bruches multipliziert und durch den Zähler desselben dividiert.

Erkl. 41a. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Nenner mit derselben multipliziert.

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, a) unter Berücksichtigung der Erkl. 18 und 41 und der Antwort auf Frage 12.

b) Auflösung mit Hilfe der Erkl. 18 und der Antwort auf Frage 13, a) zu vollführen.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, b) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, d) unter Berücksichtigung von Erkl. 41a.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, e) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13, a).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, f) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 12 und 13.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 14. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n$

b) $m = 4n+2$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n} = (\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}\cdot i^{4n}$$

Erkl. 42. Ein Satz der Potenzlehre lautet:

„Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor potenziert."

In Zeichen:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Umgekehrt ist auch:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.")

Nun ist:

$$i^{4n} = +1$$

[nach Formel 1) des Formelverzeichnisses]

folglich:

$$a^{4n} \cdot i^{4n} = +a^{4n}$$

oder:

$$= +a^m$$

Ist $m = 4n + 2$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n+2} = (\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+2} = a^{4n+2} \cdot i^{4n+2}$$

und, da $i^{4n+2} = -1$ ist

[nach Formel 3) des Formelverzeichnisses]

so folgt:

$$a^{4n+2} \cdot i^{4n+2} = -a^{4n+2}$$

oder:

$$= -a^m$$

In Worten:

„Alle geraden Potenzen einer imaginären Zahl sind reell und positiv, wenn der Potenzexponent durch 4 ohne Rest teilbar ist; jedoch negativ, wenn dies nicht der Fall ist."

Frage 15. Was erhält man für die geraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Potenzexponent m negativ und

a) $m = 4n$
b) $m = 4n + 2$

ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Ist $m = 4n$, so erhält man nach der vorigen Antwort:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^{4n}} = \frac{1}{+a^{4n}}$$

oder:

$$= \frac{1}{a^m}$$

Ist $m = 4n + 2$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^{4n+2}}$$

(nach der Antwort auf Frage 14)

$$= -\frac{1}{a^{4n+2}}$$

oder:

$$= -\frac{1}{a^m}$$

Frage 16. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n + 1$
b) $m = 4n + 3$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n + 1$, so ist:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n+1} = (\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1})^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i^{4n+1}$$

Nun ist:

$$i^{4n+1} = +i \text{ [nach Formel 2)]}$$

folglich ist:

$$a^{4n+1} \cdot i^{4n+1} = a^{4n+1} \cdot i$$

oder:

$$= a^m \cdot i$$

Ist $m = 4n + 3$, so erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m = a^{4n+3} \cdot i^{4n+3}$$

und, da $i^{4n+3} = +i$ ist [nach Formel 4)] so folgt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = -a^m \cdot i$$

In Worten:

„Alle ungeraden Potenzen einer imaginären Zahl sind imaginär und positiv, wenn der Potenzexponent, durch 4 geteilt, den Rest 1, negativ, wenn er den Rest 3 lässt.“

Frage 17. Was erhält man für die ungeraden Potenzen einer imaginären Zahl, wenn der Exponent negativ ist?

Antwort. Nach Erkl. 24 ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = \frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m}$$

Für $m = 4n + 1$ gibt:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{a^m \cdot i} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

Nun ist:

$$\frac{1}{i} = -i \text{ [nach Antwort a) auf Frage 4]}$$

folglich ist:

$$(\sqrt{-a^2})^{-m} = -\frac{1}{a^m} \cdot i = -\frac{i}{a^m}$$

Für $m = 4n + 3$ ist:

$$\frac{1}{(\sqrt{-a^2})^m} = \frac{1}{-a^m \cdot i} = -\frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{i}$$

(nach der Antwort auf Frage 16)

oder:

$$= -\frac{1}{a^m} \cdot (-i) = +\frac{i}{a^m}$$

Frage 18. Mit Hilfe welcher Formeln lassen sich die Potenzen der imaginären Zahlen berechnen?

Antwort. Bezeichnet man den reellen Faktor der imaginären Zahl mit r und mit n eine positive ganze Zahl, so erhält man:

1) $(r \cdot i)^{4n} = r^{4n}$

2) $(r \cdot i)^{4n+1} = r^{4n+1} \cdot i$

3) $(r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2}$
4) $(r\cdot i)^{4n+3} = -r^{4n+3}\cdot i$
5) $(r\cdot i)^{-4n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{4n}$
6) $(r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\frac{i}{r^{4n+1}}$
7) $(r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\frac{1}{r}\right)^{4n+2}$
8) $(r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\frac{i}{r^{4n+3}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich ohne weiteres aus den vorstehenden Antworten.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 14. Es sind mit Hilfe der in Antwort auf Frage 18 aufgeführten Formeln die nachfolgenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-5})^4$ e) $(\sqrt{-3})^{-8}$
b) $(\sqrt{-5})^5$ f) $(\sqrt{-3})^{-9}$
c) $(\sqrt{-5})^6$ g) $(\sqrt{-3})^{-10}$
d) $(\sqrt{-5})^7$ h) $(\sqrt{-3})^{-11}$

Erkl. 43. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert."

In Zeichen: $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Erkl. 43a. Eine Potenz mit einem Bruchexponenten (sog. Bruchpotenz) ist eine andere Form für eine Potenz unter einer Wurzel, z. B.:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = 5$$
$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} = \sqrt{216}$$

Erkl. 43b. Man erhält nach den beiden vorstehenden Erklärungen für:

$$(\sqrt{-5})^5 = +(\sqrt{5})^5\cdot i^5 = 5^{\frac{5}{2}}\cdot i$$
$$= 5^2\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{-5})^7 = +(\sqrt{5})^7\cdot i^7 = 5^{\frac{7}{2}}\cdot(-i)$$
$$= -5^3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{3})^9 = 3^{\frac{9}{2}} = 3^4\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 81\cdot\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{3})^{11} = 3^{\frac{11}{2}} = 3^5\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 243\cdot\sqrt{3}$$

Auflösung.

a) $(\sqrt{-5})^4 = (\sqrt{5}\cdot i)^4 = (\sqrt{5})^4$ [nach Formel 1), $n = 1$ gesetzt].

Also gibt:

$$(\sqrt{-5})^4 = 5^2 \text{ (nach Erkl. 43)} = 25$$

b) $(\sqrt{-5})^5 = (\sqrt{-5})^{4\cdot 1+1}$
$= (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+1}$

also nach Formel 2):

$$= (\sqrt{5})^5\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

c) $(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+2}$

demnach nach Formel 3):

$$= -(\sqrt{5})^6 = -5^3 \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= -125$$

d) $(\sqrt{-5})^7 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+3}$

also nach Formel 4):

$$= -(\sqrt{5})^7\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

e) $(\sqrt{-3})^{-8} = (\sqrt{-3})^{-4\cdot 2}$

demnach nach Formel 5), $n = 2$ gesetzt:

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \frac{1^8}{3^4} \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= \frac{1}{81}$$

f) $(\sqrt{-3})^{-9} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+1)}$
$= (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+1)}$

also nach Formel 6):

$$= -\frac{i}{(\sqrt{3})^9} = -\frac{i}{81\sqrt{3}}$$
(siehe Erkl. 34b).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $(\sqrt{-3})^{-10} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+2)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+2)}$

demnach nach Formel 7):

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} = -\frac{1}{3^5} \text{ (nach Erkl. 43)}$$

$$= -\frac{1}{243}$$

h) $(\sqrt{-3})^{-11} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+3)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+3)}$

also nach Formel 8):

$$= +\frac{i}{(\sqrt{3})^{11}} = +\frac{i}{243\sqrt{3}}$$

(siehe Erkl. 43 b).

Aufgabe 15. Nachfolgende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

Erkl. 44. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Ein Bruch wird potenziert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner potenziert."

In Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Umgekehrt ist:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Erkl. 45. Werden Wurzeln mit gleichem Exponenten und gleichem Radikandus so oft miteinander multipliziert, als der Exponent Einheiten besitzt, so erhält man den Radikandus; z. B.:

$$\sqrt[2]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[2]{\frac{b}{c}} = \sqrt[2]{\frac{b^2}{c^2}} \text{ (nach Erkl. 9)} = \frac{b}{c}$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

Erkl. 45 a. Nach den Erkl. 43 und 44 ist:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{b^3\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{b^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^2\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{c^2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Auflösung. a) Der Faktor:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

oder:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+3}$$

folglich nach Formel 17) des Formelverzeichnisses:

$$= a^7\cdot\left[-\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7\cdot i\right]$$

oder:

$$= -a^7\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Der Faktor:

$$\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

oder:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+1}$$

folglich nach Formel 15):

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5\cdot i$$

oder:

$$= -a^5\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot i\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Mithin erhält man für:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{a^7 b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\cdot\left(-\frac{a^5 b^2}{c^2}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$$

$$= +\frac{a^{12} b^5}{c^5}\cdot i^2\cdot\frac{b}{c} \text{ (nach d. Erkl. 18 a, 23 u. 45)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder:

$$= -\frac{a^{12} b^6}{c^6}$$

weil $i^2 = -1$ ist.

b) $\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$

b) Der erste Faktor:

$$\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

gibt nach Erkl. 42 und Antwort auf Frage 2

$$= +3^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot i^3$$

oder:

$$= +27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (-i)$$

(nach Erkl. 43)

d. i.:

$$= -9i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Der zweite Faktor:

$$\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$$

ist nach Formel 15) des Formelverzeichnisses:

$$= -2^5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 \cdot i \quad (\text{denn } 5 = 4 \cdot 1 + 1)$$

oder:

$$= -32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \quad (\text{nach Erkl. 43})$$

d. i.:

$$= -8i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Mithin gibt:

$$\left(+3\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(-9i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(-8i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = +72i^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(nach den Erkl. 9 und 18a)

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= -72\sqrt{\frac{1}{6}}$$

c) $\dfrac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5}$

Erkl. 46. Es gibt:

$$(\sqrt{a^2b^3})^7 = \left(a^{\frac{2}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^7 = a^{\frac{14}{2}} \cdot b^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{a^{14}b^{21}}$$

$$(\sqrt{a^3b^2})^5 = \left(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{2}}\right)^5 = a^{\frac{15}{2}} \cdot b^{\frac{10}{2}} = \sqrt[2]{a^{15}b^{10}}$$

c) Man erhält für:

$$\frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5} = \frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^{4\cdot 1+3}}{(+\sqrt{-a^3b^2})^{4\cdot 1+3}}$$

oder nach den Formeln 17) bezw. 15):

$$= \frac{-[-(\sqrt{a^2b^3})^7 \cdot i]}{+[(\sqrt{a^3b^2})^5 \cdot i]} = \frac{+i\sqrt{a^{14}b^{21}}}{+i\sqrt{a^{15}b^{10}}}$$

(siehe Erkl. 46)

oder:

$$= \sqrt{\frac{a^{14}b^{21}}{a^{15}b^{10}}} = \sqrt{\frac{b^{11}}{a}} = b^5 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$$

d) $\dfrac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \dfrac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2}$

Erkl. 47. Man erhält für:

$$(\sqrt{-8})^4 = (\sqrt{8})^4 \cdot i^4 = 8^2 \cdot 1 = +64$$

$$(-\sqrt{-2})^2 = (-\sqrt{2} \cdot i)^2 = (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$$

d) Nach Erkl. 39 ist:

$$\frac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \frac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2} = \frac{(\sqrt{-8})^4 \cdot (-\sqrt{-2})^2}{(-\sqrt{-3})^3 \cdot (\sqrt{-12})^5} = \frac{(\sqrt{8})^2 \cdot (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1)}{i(\sqrt{3})^3 \cdot i \cdot (\sqrt{12})^5} = \frac{64 \cdot 2 \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 288 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2} \quad \text{(s. Erkl. 47)}$$

oder:

$$= \frac{-64 \cdot 2}{-3 \cdot 288 \cdot 3} \quad \left\} \text{ [nach Erkl. 45 und Antw. auf Frage 4, c)]} \right.$$

oder:

$$= +\frac{4}{81}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Es sind mit Hilfe der Formeln 14) bis 21) des Formelverzeichnisses die nachstehenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-2})^{12}$ e) $(\sqrt{-6})^{-4}$
b) $(\sqrt{-2})^{13}$ f) $(\sqrt{-6})^{-5}$
c) $(\sqrt{-2})^{14}$ g) $(\sqrt{-6})^{-6}$
d) $(\sqrt{-2})^{15}$ h) $(\sqrt{-6})^{-7}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 14, a) bis 14, h).

Aufgabe 17. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7 : \left(-a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

b) $\left(+4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{8}}\right)^5$

c) $(+a \cdot \sqrt{-ab^3})^3 \cdot (-b \cdot \sqrt{-a^3b})^4$

d) $\dfrac{(-3 \cdot \sqrt{-2})^8}{(+2 \cdot \sqrt{-3})^6}$

e) $\dfrac{(\sqrt{-5})^2}{(-\sqrt{-3})^5} : \dfrac{(-\sqrt{-27})^3}{(\sqrt{-2})^4}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, c).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, b).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, a).

d) Man bringe Zähler und Nenner des gegebenen Bruches für sich allein auf die kürzeste Form und führe hierauf erst die Division aus.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, d).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg