Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 6. Wie werden imaginäre Zahlen addiert?

Antwort. Imaginäre Zahlen werden addiert, indem man die algebraische Summe ihrer reellen Faktoren mit der imaginären Einheit multipliziert.

Behauptung.

$$\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$

Beweis. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{-a}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\\ \text{und}\quad \sqrt{-b}&=\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 2)}$$

folglich ist:

$$\begin{aligned}\sqrt{-a}+\sqrt{-b}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\\ &=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}\end{aligned}$$

(nach Erkl. 26)

Erkl. 26. Wenn die Glieder einer Summe einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen, so kann man jedes dieser Glieder durch diesen Faktor dividieren, die Quotienten algebraisch addieren, sie in eine Klammer setzen und letztere mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizieren; z. B.:

$$\begin{aligned}81a^4-54a^2&=\left(\frac{81a^4}{27a^2}-\frac{54a^2}{27a^2}\right)\cdot 27a^2\\ &=(3a^2-2)\cdot 27a^2\end{aligned}$$

denn umgekehrt gibt:

$$(3a^2-2)\cdot 27a^2=81a^4-54a^2$$

Erkl. 27. Wenn man die Zweideutigkeit der Wurzeln berücksichtigt, so erhält man für $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$ nicht weniger als vier verschiedene Lösungen, nämlich wenn der aus $\sqrt{a}$ resultierende absolute Wert mit r und der aus $\sqrt{b}$ resultierende mit r_1 bezeichnet wird, die folgenden:

1) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r+r_1)\cdot i$

2) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(+r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r+r_1)\cdot i$

3) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(+r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(+r-r_1)\cdot i$

4) $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=[(-r)+(-r_1)]\cdot\sqrt{-1}$
$=(-r-r_1)\cdot i=-(r+r_1)\cdot i$

(Siehe die beiden folgenden Erkl. 28 u. 28a).

Erkl. 28. Der Satz von der Auflösung der Klammern lautet:

„Gleiche Zeichen vor und in der Klammer geben +, ungleiche —."

Erkl. 28a. Es ist üblich, das Rechnungszeichen der Summe (+) fortzulassen und die Glieder nur mit ihren Vorzeichen aneinanderzureihen, also statt: $(+\sqrt{a})+(-\sqrt{b})$ zu schreiben: $+\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Erkl. 29. Sind mehrere imaginäre Zahlen positiv und mehrere negativ, so hat man zuerst alle positiven, dann alle negativen Zahlen für sich zu addieren und schliesslich die beiden Summen nach der in der Antwort auf Frage 6 gegebenen Regel zu vereinigen.

Frage 7. Wie wird eine imaginäre Zahl von einer andern subtrahiert?

Antwort. Eine imaginäre Zahl wird von einer andern subtrahiert, indem man

Erkl. 30. Die für das Rechnen mit reellen Zahlen aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf die imaginären Zahlen anwenden, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen. Da die imaginären Zahlen aus der imaginären Einheit in gleicher Weise entstehen wie die reellen Zahlen aus der reellen Einheit, so lassen sich auch die imaginären Zahlen zu einander addieren und von einander subtrahieren.

sie zu letzterer mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

In Zeichen:

$$\sqrt{-a}-(+\sqrt{-b})=\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$$
(nach Erkl. 28)

$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(nach Erkl. 26)

und

$$\sqrt{-a}-(-\sqrt{-b})=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$$
$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(siehe Erkl. 30)

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})$

Auflösung. a) Man erhält:

$$(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})=(+\sqrt{256}\cdot\sqrt{-1})+(\sqrt{729}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{196}\cdot\sqrt{-1})$$
$$=(+16i)+(+27i)+(-11i)+(-14i)$$
$$=(16+27-11-14)i=+18i$$

---

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)$

b) $$\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)=\left(+\sqrt{\frac{16a^4}{25b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)-\left(-\sqrt{\frac{36a^4}{49b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)=+\frac{4a^2}{5b}\cdot i+\frac{6a^2}{7b}\cdot i$$ (nach Erkl. 31)

oder:

$$=\frac{58a^2i}{35b}$$ (nach Erkl. 26)

---

c) $2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}$

Erkl. 31. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Die $n$te Wurzel aus einem Bruche ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzel des Zählers durch die $n$te Wurzel des Nenners."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Es ist:

$$2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}=2\cdot\sqrt{96}\cdot\sqrt{-1}-3\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{-1}+5\cdot\sqrt{216}\cdot\sqrt{-1}-7\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{-1}$$

oder, indem man die Radikanden der reellen Wurzeln soweit in Faktoren zerlegt, dass sich wenigstens teilweise die Wurzel ziehen lässt, und für $\sqrt{-1}=i$ setzt:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{16\cdot 6}-3\cdot i\cdot\sqrt{4\cdot 6}+5\cdot i\cdot\sqrt{36\cdot 6}-7\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 6}$$

Umgekehrt gibt:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

d) $\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a}$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2 \cdot i \cdot 4 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} - 7 \cdot i \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 8i\sqrt{6} - 6i\sqrt{6} + 30i\sqrt{6} - 21i\sqrt{6} = +11i\sqrt{6}$$

Erkl. 32. Um Faktoren, die vor einer Wurzel stehen, unter dieselbe zu bringen, muss man sie auf den Grad potenzieren, welchen die Wurzel besitzt.

In Zeichen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

d) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-1} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} - 2a \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}\sqrt{-1} + b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

und, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(b \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} - 2ab \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + b \cdot \sqrt{a}\right) \cdot i$$

oder, da: $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$ ist (nach Erkl. 32):

$$= (b \cdot \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + b\sqrt{a}) \cdot i$$

$$= (b - 2 - 2b + b) i \sqrt{a} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

$$= -2i\sqrt{a}$$

---

e) $5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

e) Zunächst gibt:

$$5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{-1} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-1} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= \sqrt{\frac{5^2}{5}} = \sqrt{5} \\ \text{und} \quad 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{5^2}{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \text{(nach Erkl. 32)}$$

Folglich erhält man für:

$$\left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot i - 4\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

oder $= 5i\sqrt{5}$.

---

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot a}{25 \cdot 0{,}2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0{,}3 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5\,d} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \frac{7\,b}{c\,d^3} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} - \frac{90\,a b}{c^2 d^2} + \frac{49\,a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64\,x^4 y^2}{81\,z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100\,x^2}{169\,z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3\,a} \cdot \sqrt{-\frac{9\,a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25\,a^3}{9\,b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

f) $y^4 \cdot \sqrt{-\frac{x^6 y}{z^3}} - x \cdot \sqrt{-\frac{x y^5}{z^5}} - \frac{x^3}{z} \cdot \sqrt{-\frac{y^9}{z}} + y^2 z \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{-\frac{y^3}{x^5}}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, f).

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 8. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln miteinander multipliziert?

Erkl. 33. Die Mathematiker zu Ende des vorigen Jahrhunderts waren darüber im Zweifel, was man unter dem Produkte zweier imaginären Quadratwurzeln zu verstehen habe. Ein Teil von ihnen (z. B. auch Euler) war der Ansicht, dass dieses Produkt gleich einer reellen Grösse, nämlich:

$$= -\sqrt{a \cdot b}$$

wäre; die übrigen (darunter z. B. der englische Mathematiker Emerson) glaubten für:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

setzen zu müssen, weil ein Produkt aus unmöglichen Grössen keine mögliche Grösse geben könnte. (Vergl. Hutton, Mathematical dictionary, 1796.)

Erkl. 33 a. Das Produkt zweier imaginären Zahlen ist gleich dem Produkt der entsprechenden reellen Zahlen. Letzteres Produkt ist positiv, wenn die imaginären Faktoren ungleiche, negativ, wenn sie gleiche Vorzeichen besitzen.

Man erhält also:

$$(+ai) \cdot (+bi) = +abi^2 = -ab$$

und

$$(+ai) \cdot (-bi) = -abi^2 = +ab$$

Antwort. Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der negativen Quadratwurzel aus dem Produkte der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

(nach Antwort auf Frage 4, c)

folglich ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (-1) = -\sqrt{a \cdot b}$$

(vergl. Erkl. 33 a)

Frage 9. Was erhält man für:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}\,?$$

Erkl. 34. Eine Summe von gleichen imaginären Summanden ist gleich einem Produkte aus einer imaginären und einer reellen Zahl.

Man erhält für:

$$(+ai) \cdot b = +ai + ai + ai + \cdots$$
$$= +(a + a + a \cdots)\, i = (ab)\, i$$

und für:

$$(-ai) \cdot b = (-ai) + (-ai) + \cdots$$
$$= -(a + a + a \cdots)\, i = -(ab)\, i$$

Eine Multiplikation mit $-b$ hat dieselbe Bedeutung wie eine Multiplikation mit b und eine Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Demnach ist:

$$(+ai) \cdot (-b) = -(ab)\, i$$

und

$$(-ai) \cdot (-b) = +(ab)\, i$$

Antwort. Das Produkt zweier Quadratwurzeln, von welchen die eine imaginär ist, ist imaginär und gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a \cdot b \cdot (-1)} = \sqrt{-a \cdot b}$$

(oder $= i\sqrt{ab}$) (siehe Erkl. 34).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg