Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 30. Die für das Rechnen mit reellen Zahlen aufgestellten Gesetze lassen sich auch auf die imaginären Zahlen anwenden, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen. Da die imaginären Zahlen aus der imaginären Einheit in gleicher Weise entstehen wie die reellen Zahlen aus der reellen Einheit, so lassen sich auch die imaginären Zahlen zu einander addieren und von einander subtrahieren.

sie zu letzterer mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert.

In Zeichen:

$$\sqrt{-a}-(+\sqrt{-b})=\sqrt{-a}-\sqrt{-b}$$
(nach Erkl. 28)

$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(nach Erkl. 26)

und

$$\sqrt{-a}-(-\sqrt{-b})=\sqrt{-a}+\sqrt{-b}$$
$$\text{oder:}\quad =(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot\sqrt{-1}$$
(siehe Erkl. 30)

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 7. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})$

Auflösung. a) Man erhält:

$$(+\sqrt{-256})+(+\sqrt{-729})+(-\sqrt{-121})+(-\sqrt{-196})=(+\sqrt{256}\cdot\sqrt{-1})+(\sqrt{729}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{121}\cdot\sqrt{-1})+(-\sqrt{196}\cdot\sqrt{-1})$$
$$=(+16i)+(+27i)+(-11i)+(-14i)$$
$$=(16+27-11-14)i=+18i$$

---

b) $\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)$

b) $$\left(+\sqrt{-\frac{16a^4}{25b^2}}\right)-\left(-\sqrt{-\frac{36a^4}{49b^2}}\right)=\left(+\sqrt{\frac{16a^4}{25b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)-\left(-\sqrt{\frac{36a^4}{49b^2}}\cdot\sqrt{-1}\right)=+\frac{4a^2}{5b}\cdot i+\frac{6a^2}{7b}\cdot i$$ (nach Erkl. 31)

oder:

$$=\frac{58a^2i}{35b}$$ (nach Erkl. 26)

---

c) $2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}$

Erkl. 31. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Die $n$te Wurzel aus einem Bruche ist gleich dem Quotienten der $n$ten Wurzel des Zählers durch die $n$te Wurzel des Nenners."

In Zeichen:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

c) Es ist:

$$2\cdot\sqrt{-96}-3\cdot\sqrt{-24}+5\cdot\sqrt{-216}-7\cdot\sqrt{-54}=2\cdot\sqrt{96}\cdot\sqrt{-1}-3\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{-1}+5\cdot\sqrt{216}\cdot\sqrt{-1}-7\cdot\sqrt{54}\cdot\sqrt{-1}$$

oder, indem man die Radikanden der reellen Wurzeln soweit in Faktoren zerlegt, dass sich wenigstens teilweise die Wurzel ziehen lässt, und für $\sqrt{-1}=i$ setzt:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{16\cdot 6}-3\cdot i\cdot\sqrt{4\cdot 6}+5\cdot i\cdot\sqrt{36\cdot 6}-7\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 6}$$

Umgekehrt gibt:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

d) $\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a}$

oder nach Erkl. 9:

$$= 2 \cdot i \cdot 4 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot i \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + 5 \cdot i \cdot 6 \cdot \sqrt{6} - 7 \cdot i \cdot 3 \cdot \sqrt{6} = 8i\sqrt{6} - 6i\sqrt{6} + 30i\sqrt{6} - 21i\sqrt{6} = +11i\sqrt{6}$$

Erkl. 32. Um Faktoren, die vor einer Wurzel stehen, unter dieselbe zu bringen, muss man sie auf den Grad potenzieren, welchen die Wurzel besitzt.

In Zeichen:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

d) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{-ab^2} - 2 \cdot \sqrt{-a} - 2a \cdot \sqrt{-\frac{b^2}{a}} + b \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{ab^2} \cdot \sqrt{-1} - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} - 2a \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a}}\sqrt{-1} + b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$$

und, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinsamen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(b \cdot \sqrt{a} - 2 \cdot \sqrt{a} - 2ab \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} + b \cdot \sqrt{a}\right) \cdot i$$

oder, da: $a \cdot \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{a}} = \sqrt{a}$ ist (nach Erkl. 32):

$$= (b \cdot \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a} + b\sqrt{a}) \cdot i$$

$$= (b - 2 - 2b + b) i \sqrt{a} \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

$$= -2i\sqrt{a}$$

---

e) $5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$

e) Zunächst gibt:

$$5 \cdot \sqrt{-\frac{4}{5}} + 6 \cdot \sqrt{-\frac{5}{4}} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{-1} + 6 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-1} - 10 \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + 8 \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert und den gemeinschaftlichen Faktor $\sqrt{-1} = i$ absondert:

$$= \left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \quad \text{(nach Erkl. 31)}$$

Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} 5 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= \sqrt{\frac{5^2}{5}} = \sqrt{5} \\ \text{und} \quad 10 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} &= 2 \cdot \sqrt{\frac{5^2}{5}} = 2\sqrt{5} \end{aligned}\right\} \text{(nach Erkl. 32)}$$

Folglich erhält man für:

$$\left(5 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot i - 10 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} + 8 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} = (2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}) \cdot i - 4\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5}$$

oder $= 5i\sqrt{5}$.

---

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot a}{25 \cdot 0{,}2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0{,}3 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5\,d} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \frac{7\,b}{c\,d^3} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} - \frac{90\,a b}{c^2 d^2} + \frac{49\,a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64\,x^4 y^2}{81\,z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100\,x^2}{169\,z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3\,a} \cdot \sqrt{-\frac{9\,a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25\,a^3}{9\,b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg