Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

b) Ungelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

f) $40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$

f) Man erhält für:

$$40 \cdot \sqrt{-\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}} = 40 \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a^3 b^2}{0{,}2\,c^4 d^5}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{2{,}7\,a}{5\,d^3}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{29{,}4\,a b^2}{0{,}4\,c^2 d^7}}$$

oder, wenn man die Produkte und Potenzen soweit in Faktoren zerlegt, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann, und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{-1} = i$:

$$= \left(40 \cdot \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot a^2 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^4 \cdot d^4 \cdot d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}3 \cdot a}{25 \cdot 0{,}2 \cdot d^2 \cdot d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \sqrt{\frac{49 \cdot 0{,}3 \cdot a \cdot b^2}{0{,}2 \cdot c^2 \cdot d^6 \cdot d}}\right) \cdot i$$

oder, wenn man soweit als möglich radiziert:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} - \frac{150\,a b}{c^2 d} \cdot \frac{3}{5\,d} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} + \frac{7\,a d}{c} \cdot \frac{7\,b}{c\,d^3} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}\right) \cdot i$$

oder nach dem Kürzen der Brüche und nach Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $\sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$:

$$= \left(\frac{40\,a b}{c^2 d^2} - \frac{90\,a b}{c^2 d^2} + \frac{49\,a b}{c^2 d^2}\right) \cdot i \cdot \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}} = -\frac{a b i}{c^2 d^2} \sqrt{\frac{0{,}3\,a}{0{,}2\,d}}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 8. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(-\sqrt{-324}) + (+\sqrt{-144}) + (-\sqrt{-289}) + (+\sqrt{-441})$

b) $\left(-\sqrt{-\frac{64\,x^4 y^2}{81\,z^6}}\right) - \left(+\frac{x y}{z} \cdot \sqrt{-\frac{100\,x^2}{169\,z^4}}\right)$

c) $3 \cdot \sqrt{-20} + 4 \cdot \sqrt{-180} - 5 \cdot \sqrt{-125} + 6 \cdot \sqrt{-405}$

d) $+\sqrt{-\frac{a^3}{b^5}} - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{-\frac{a}{b^3}} - \frac{2}{3\,a} \cdot \sqrt{-\frac{9\,a^5}{b^3}} + b^3 \cdot \sqrt{-\frac{25\,a^3}{9\,b^9}}$

e) $3 \cdot \sqrt{-\frac{7}{9}} - 2 \cdot \sqrt{-28} + 7 \cdot \sqrt{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{3} \cdot \sqrt{-63}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, b) unter Berücksichtigung von Erkl. 28.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, c).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, d) und 7, f) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, e) unter Berücksichtigung von Erkl. 32.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

f) $y^4 \cdot \sqrt{-\frac{x^6 y}{z^3}} - x \cdot \sqrt{-\frac{x y^5}{z^5}} - \frac{x^3}{z} \cdot \sqrt{-\frac{y^9}{z}} + y^2 z \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}} + \frac{x}{y} \cdot \sqrt{-\frac{y^3}{x^5}}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 7, f).

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 8. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln miteinander multipliziert?

Erkl. 33. Die Mathematiker zu Ende des vorigen Jahrhunderts waren darüber im Zweifel, was man unter dem Produkte zweier imaginären Quadratwurzeln zu verstehen habe. Ein Teil von ihnen (z. B. auch Euler) war der Ansicht, dass dieses Produkt gleich einer reellen Grösse, nämlich:

$$= -\sqrt{a \cdot b}$$

wäre; die übrigen (darunter z. B. der englische Mathematiker Emerson) glaubten für:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

setzen zu müssen, weil ein Produkt aus unmöglichen Grössen keine mögliche Grösse geben könnte. (Vergl. Hutton, Mathematical dictionary, 1796.)

Erkl. 33 a. Das Produkt zweier imaginären Zahlen ist gleich dem Produkt der entsprechenden reellen Zahlen. Letzteres Produkt ist positiv, wenn die imaginären Faktoren ungleiche, negativ, wenn sie gleiche Vorzeichen besitzen.

Man erhält also:

$$(+ai) \cdot (+bi) = +abi^2 = -ab$$

und

$$(+ai) \cdot (-bi) = -abi^2 = +ab$$

Antwort. Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der negativen Quadratwurzel aus dem Produkte der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

(nach Antwort auf Frage 4, c)

folglich ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (-1) = -\sqrt{a \cdot b}$$

(vergl. Erkl. 33 a)

Frage 9. Was erhält man für:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}\,?$$

Erkl. 34. Eine Summe von gleichen imaginären Summanden ist gleich einem Produkte aus einer imaginären und einer reellen Zahl.

Man erhält für:

$$(+ai) \cdot b = +ai + ai + ai + \cdots$$
$$= +(a + a + a \cdots)\, i = (ab)\, i$$

und für:

$$(-ai) \cdot b = (-ai) + (-ai) + \cdots$$
$$= -(a + a + a \cdots)\, i = -(ab)\, i$$

Eine Multiplikation mit $-b$ hat dieselbe Bedeutung wie eine Multiplikation mit b und eine Umkehrung des Vorzeichens des Resultats. Demnach ist:

$$(+ai) \cdot (-b) = -(ab)\, i$$

und

$$(-ai) \cdot (-b) = +(ab)\, i$$

Antwort. Das Produkt zweier Quadratwurzeln, von welchen die eine imaginär ist, ist imaginär und gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der Radikanden.

Behauptung.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Beweis. Es ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= \sqrt{a \cdot b \cdot (-1)} = \sqrt{-a \cdot b}$$

(oder $= i\sqrt{ab}$) (siehe Erkl. 34).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg