Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Frage 10. Was erhält man für:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach vorstehender Antwort ist:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{-a} = \sqrt{-a \cdot a} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{-1} = ai$$

Frage 11. Was erhält man für:

$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 8 ist:

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = -\sqrt{a \cdot b}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -\sqrt{a \cdot a} = -\sqrt{a^2} = -a$$

In Worten:

„Das Produkt zweier imaginären Quadratwurzeln mit gleichen Radikanden ist gleich dem negativen Radikandus."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 9. Nachstehende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

Auflösung. a) Es ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= -\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= -\sqrt{ab} \cdot (-1) = +\sqrt{ab}$$

b) $(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

b) Wie vorstehend gezeigt wurde, ist:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = +\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$(\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = +\sqrt{a \cdot a}$$
$$= +\sqrt{a^2} = +a$$

c) $-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$

c) Es ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b})$$
$$= (-\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1})$$
$$= +\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2$$
$$= +\sqrt{ab} \cdot (-1) = -\sqrt{ab}$$

d) $(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a})$

d) Nach vorstehender Lösung ist:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-b}) = -\sqrt{ab}$$

Setzt man für $b = a$, so ergibt sich:

$$(-\sqrt{-a}) \cdot (-\sqrt{-a}) = -\sqrt{aa}$$
$$= -\sqrt{a^2} = -a$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

e) $a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5}$

e) Man erhält für:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot \sqrt{a^5 b^3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{ab^5} \cdot \sqrt{-1}$$

oder nach Erkl. 9:

$$= a \cdot \sqrt{a^6 b^8} \cdot (\sqrt{-1})^2$$

Nun ist:

$$\sqrt{a^6 b^8} = a^3 b^4 \text{ und } (\sqrt{-1})^2 = -1$$

folglich ist:

$$a \cdot \sqrt{-a^5 b^3} \cdot \sqrt{-ab^5} = a \cdot a^3 \cdot b^4 \cdot (-1) = -a^4 b^4$$

f) $-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 8 gibt:

$$\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}} = -\sqrt{7 \cdot 5\frac{1}{7}} = -\sqrt{36} = -6$$

also:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) = -(-6) = +6$$

ferner:

$$+\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}$$
$$= +\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{-1}$$
$$= +\sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4\frac{4}{9}} \cdot (\sqrt{-1})^4 = +\sqrt{400} \cdot (+1) = +20$$

(vergleiche Anmerkung 3)

endlich:

$$-\left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = -\left(-\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{128}{7}}\right) = -(-\sqrt{64}) = +8$$

Demnach erhält man für:

$$-\left(\sqrt{-7} \cdot \sqrt{-5\frac{1}{7}}\right) + \left(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-6} \cdot \sqrt{-4\frac{4}{9}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{-18\frac{2}{7}}\right) = +6 + 20 + 8 = +34$$

g) $\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}}$

g) Der Minuendus:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}}$$

gibt nach Absonderung der imaginären Einheit und Vereinigung der reellen Wurzeln:

$$= \sqrt{\frac{a^3 \cdot a^2 \cdot b}{b^2 \cdot b^3 \cdot a}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

der Subtrahendus:

$$= \sqrt{\frac{b^5 \cdot a^2 \cdot a^9}{a^7 \cdot b \cdot b^8}} \cdot (\sqrt{-1})^3 = \sqrt{\frac{a^4}{b^4}} \cdot (-i) = -\frac{a^2 i}{b^2}$$

Folglich erhält man für:

$$\sqrt{-\frac{a^3}{b^2}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b^3}} \cdot \sqrt{-\frac{b}{a}} - \sqrt{-\frac{b^5}{a^7}} \cdot \sqrt{-\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{-\frac{a^9}{b^8}} = -\frac{a^2 i}{b^2} - \left(-\frac{a^2 i}{b^2}\right) = 0$$

h) $(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$

h) Nach den Erkl. 18a und 35 gibt:

$$(2\cdot\sqrt{-5}+3\cdot\sqrt{-6}-4\cdot\sqrt{-10}+5\cdot\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-30}$$
$$=2\cdot\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-30}+3\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-30}-$$
$$4\cdot\sqrt{-10}\cdot\sqrt{-30}+5\cdot\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-30}$$

oder:

$$=2\cdot(-\sqrt{150})+3\cdot(-\sqrt{180})-$$
$$4\cdot(-\sqrt{300})+5\cdot(-\sqrt{450})$$

(nach der Antwort auf Frage 8)

oder nach Zerlegung der Radikanden in solche Faktoren, dass wenigstens teilweise die Wurzel gezogen werden kann:

$$=-2\cdot\sqrt{25\cdot6}-3\cdot\sqrt{36\cdot5}+$$
$$4\cdot\sqrt{100\cdot3}-5\cdot\sqrt{225\cdot2}$$
$$=-2\cdot5\cdot\sqrt{6}-3\cdot6\cdot\sqrt{5}+$$
$$4\cdot10\cdot\sqrt{3}-5\cdot15\cdot\sqrt{2}$$ (nach Erkl. 9)

d. i.:

$$=-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$

(siehe Erkl. 35a)

Erkl. 35. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird mit einer eingliederigen multipliziert, indem man jedes Glied der Klammer mit letzterer multipliziert.

Erkl. 35a. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$-10\sqrt{6}-18\sqrt{5}+40\sqrt{3}-75\sqrt{2}$$
$$=-10\cdot2{,}449-18\cdot2{,}236+40\cdot1{,}732-75\cdot1{,}414$$
$$=-24{,}49-40{,}248+69{,}28-106{,}05$$
$$=-101{,}508$$

---

i) $\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$

i) Nach den Erkl. 18b und 35 ist:

$$\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{5}}-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+5\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}-4\frac{1}{6}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)\cdot(-2\cdot\sqrt{-30})$$
$$=-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{5}\cdot30}\right)+8\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{6}\cdot30}\right)$$
$$-10\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{6}\cdot30}\right)+8\frac{1}{3}\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}\cdot30}\right)$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}+10\cdot5-8\frac{1}{3}\cdot6$$
$$=+6\cdot\sqrt{6}-8\cdot\sqrt{5}$$ (siehe Erkl. 35b)

Erkl. 35b. Auf drei Dezimalstellen genau erhält man für:

$$+6\sqrt{6}-8\sqrt{5}=+6\cdot2{,}449-8\cdot2{,}236$$
$$=-3{,}194$$

---

k) $(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$

k) Multipliziert man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten (siehe Erkl. 36), so erhält man nach der Antwort auf Frage 8 und nach Erkl. 35:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot\sqrt{-39}$$
$$=-\sqrt{13\cdot39}-\sqrt{15\cdot39}$$
$$=-13\sqrt{3}-3\sqrt{65}$$ (s. Erkl. 36a)

und wenn man die erste Klammer mit dem zweiten Gliede der zweiten Klammer multipliziert:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\quad\sqrt{-45})$$
$$=-(-\sqrt{13\cdot45})-(-\sqrt{15\cdot45})$$
$$=-(-3\cdot\sqrt{65})-(-15\cdot\sqrt{3})$$
$$=+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$ (s. Erkl. 36a)

Erkl. 36. Zwei mehrgliederige (Klammer-) Grössen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Klammer mit jedem Gliede der anderen multipliziert und das Gleichnamige vereinigt.

Erkl. 36a. Es gibt:

$$\sqrt{13\cdot39}=\sqrt{13\cdot13\cdot3}=\sqrt{13^2\cdot3}=13\cdot\sqrt{3}$$

(nach Erkl. 9)

$$\sqrt{15\cdot39}=\sqrt{3\cdot5\cdot13\cdot3}=\sqrt{3^2\cdot65}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{13\cdot45}=\sqrt{13\cdot9\cdot5}=3\cdot\sqrt{65}$$
$$\sqrt{15\cdot45}=\sqrt{15\cdot15\cdot3}=\sqrt{15^2\cdot3}=15\cdot\sqrt{3}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Folglich gibt:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$$
$$= -13\sqrt{3}-3\sqrt{65}+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$
$$= +2\sqrt{3}$$

(oder angenähert $= +2\cdot 1{,}732 = 3{,}464$.)

l) $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$

Erkl. 37. Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Erkl. 37a. Schneller gelangt man zum Resultat, wenn man den in Erkl. 37 aufgeführten Satz anwendet. Man erhält:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= (\sqrt{-ab})^2-(\sqrt{-bc})^2$$
$$= (-ab)-(-bc) \quad \text{(nach Erkl. 5)}$$
$$= -ab+bc = b(c-a)$$

l) Nach Erkl. 36 und Antwort auf Frage 8 erhält man:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= -\sqrt{ab\cdot ab}-\sqrt{bc\cdot ab}+\sqrt{ab\cdot bc}$$
$$+\sqrt{bc\cdot bc}$$

oder:

$$= -\sqrt{a^2b^2}-\sqrt{ab^2c}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{b^2c^2}$$

oder:

$$= -ab+bc \quad \text{(vergl. Anmerkung 3)}$$
$$= b(c-a) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

m) $\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$
$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$

m) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$$
$$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$$
$$= -18\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-56}+16\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-56}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-56}+$$
$$12\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-56}+27\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-224}-24\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-224}+$$
$$9\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-224}-18\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-224}$$
$$= -18\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 56}\right)+16\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 56}\right)-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 56}\right)+$$
$$12\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 56}\right)+27\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 224}\right)-24\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 224}\right)+$$
$$9\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 224}\right)-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 224}\right) \quad \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$
$$= +18\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{49}+6\cdot\sqrt{8}-$$
$$12\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{64}+24\cdot\sqrt{196}-$$
$$9\cdot\sqrt{32}+18\cdot\sqrt{8}$$
$$= +18\cdot 4-16\cdot 7-27\cdot 8+24\cdot 14 \quad \text{(s. Erkl. 38)}$$
$$= +72-112-216+336$$
$$= +80$$

Erkl. 38. Man erhält für:

$$6\cdot\sqrt{8} = 6\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 6\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 12\cdot\sqrt{2}$$
(nach Erkl. 9)
$$9\cdot\sqrt{32} = 9\cdot\sqrt{16\cdot 2} = 9\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$
$$18\cdot\sqrt{8} = 18\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 18\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 10. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(-a\cdot\sqrt{-a})\cdot(+a\cdot\sqrt{-a})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, b).