Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

b) Ungelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Folglich gibt:

$$(\sqrt{-13}+\sqrt{-15})\cdot(\sqrt{-39}-\sqrt{-45})$$
$$= -13\sqrt{3}-3\sqrt{65}+3\sqrt{65}+15\sqrt{3}$$
$$= +2\sqrt{3}$$

(oder angenähert $= +2\cdot 1{,}732 = 3{,}464$.)

l) $(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$

Erkl. 37. Das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate.

Erkl. 37a. Schneller gelangt man zum Resultat, wenn man den in Erkl. 37 aufgeführten Satz anwendet. Man erhält:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= (\sqrt{-ab})^2-(\sqrt{-bc})^2$$
$$= (-ab)-(-bc) \quad \text{(nach Erkl. 5)}$$
$$= -ab+bc = b(c-a)$$

l) Nach Erkl. 36 und Antwort auf Frage 8 erhält man:

$$(\sqrt{-ab}+\sqrt{-bc})\cdot(\sqrt{-ab}-\sqrt{-bc})$$
$$= -\sqrt{ab\cdot ab}-\sqrt{bc\cdot ab}+\sqrt{ab\cdot bc}$$
$$+\sqrt{bc\cdot bc}$$

oder:

$$= -\sqrt{a^2b^2}-\sqrt{ab^2c}+\sqrt{ab^2c}+\sqrt{b^2c^2}$$

oder:

$$= -ab+bc \quad \text{(vergl. Anmerkung 3)}$$
$$= b(c-a) \quad \text{(nach Erkl. 25)}$$

m) $\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$
$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$

m) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(9\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}-8\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\right)\cdot$$
$$(-2\cdot\sqrt{-56}+3\cdot\sqrt{-224})$$
$$= -18\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-56}+16\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-56}-6\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-56}+$$
$$12\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-56}+27\cdot\sqrt{-\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{-224}-24\cdot\sqrt{-\frac{7}{8}}\cdot\sqrt{-224}+$$
$$9\cdot\sqrt{-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{-224}-18\cdot\sqrt{-\frac{1}{28}}\cdot\sqrt{-224}$$
$$= -18\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 56}\right)+16\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 56}\right)-6\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 56}\right)+$$
$$12\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 56}\right)+27\cdot\left(-\sqrt{\frac{2}{7}\cdot 224}\right)-24\cdot\left(-\sqrt{\frac{7}{8}\cdot 224}\right)+$$
$$9\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{7}\cdot 224}\right)-18\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{28}\cdot 224}\right) \quad \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$
$$= +18\cdot\sqrt{16}-16\cdot\sqrt{49}+6\cdot\sqrt{8}-$$
$$12\cdot\sqrt{2}-27\cdot\sqrt{64}+24\cdot\sqrt{196}-$$
$$9\cdot\sqrt{32}+18\cdot\sqrt{8}$$
$$= +18\cdot 4-16\cdot 7-27\cdot 8+24\cdot 14 \quad \text{(s. Erkl. 38)}$$
$$= +72-112-216+336$$
$$= +80$$

Erkl. 38. Man erhält für:

$$6\cdot\sqrt{8} = 6\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 6\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 12\cdot\sqrt{2}$$
(nach Erkl. 9)
$$9\cdot\sqrt{32} = 9\cdot\sqrt{16\cdot 2} = 9\cdot 4\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$
$$18\cdot\sqrt{8} = 18\cdot\sqrt{4\cdot 2} = 18\cdot 2\cdot\sqrt{2} = 36\cdot\sqrt{2}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 10. Man soll die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(-a\cdot\sqrt{-a})\cdot(+a\cdot\sqrt{-a})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, b).

b) $x^2 z^4 \cdot \sqrt{-\frac{xy^3}{z^5}} \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}}$

b) Man wende zunächst den in der Antwort auf Frage 8 aufgeführten Satz an und verfahre hierauf nach den Erkl. 9 und 31.

c) $(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-60}) - (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-10})$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, f).

d) $\left(1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}}\right) \cdot (-6 \cdot \sqrt{-9})$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, i).

e) $(\sqrt{-xy^2} + \sqrt{-y^2 z}) \cdot (\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-y^2 z})$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, l) unter Berücksichtigung der Erkl. 9 und 37.

f) $(\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15}) \cdot (-\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15})$

f) Ausrechnung nach Erkl. 36 durchzuführen.

g) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-48} - \sqrt{-60})$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, k).

h) $(7 \cdot \sqrt{-5} + 6 \cdot \sqrt{-3}) \cdot (2 \cdot \sqrt{-125} - 5 \cdot \sqrt{-27}) \cdot (3 \cdot \sqrt{-1} + 4 \cdot \sqrt{-2})$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern miteinander, wie in Aufgabe 9, k) gezeigt wurde. Hierauf vereinige man die gleichnamigen Glieder. Sodann multipliziere man die resultierenden Glieder mit der dritten Klammer und vereinige schliesslich das Gleichnamige.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 12. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln durch einander dividiert?

Antwort. Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Erkl. 38 a. Nach der Divisionsregel ist, wenn $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ berechnet werden soll, der Faktor zu suchen, welcher mit $\sqrt{-b}$ zu multiplizieren ist, um $\sqrt{-a}$ hervorzubringen. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, denn man erhält:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = \sqrt{-a}$$

Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot 1$$

(nach Erkl. 19)

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (nach Erkl. 31)

(siehe Erkl. 38 a)

Frage 13. Was erhält man bei der Division zweier imaginären Zahlen, wenn:

a) der Dividendus eine imaginäre und der Divisor eine reelle Quadratwurzel,

Antwort.

a) Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{+b} = i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$