Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

c) Ueber das Dividieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

b) $x^2 z^4 \cdot \sqrt{-\frac{xy^3}{z^5}} \cdot \sqrt{-\frac{x^3 y}{z^7}}$

b) Man wende zunächst den in der Antwort auf Frage 8 aufgeführten Satz an und verfahre hierauf nach den Erkl. 9 und 31.

c) $(\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5} \cdot \sqrt{-60}) - (\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-20} \cdot \sqrt{-10})$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, f).

d) $\left(1\frac{2}{3} \cdot \sqrt{-\frac{3}{2}} - 3 \cdot \sqrt{-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}} - 5 \cdot \sqrt{-\frac{1}{6}}\right) \cdot (-6 \cdot \sqrt{-9})$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, i).

e) $(\sqrt{-xy^2} + \sqrt{-y^2 z}) \cdot (\sqrt{-xy^2} - \sqrt{-y^2 z})$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, l) unter Berücksichtigung der Erkl. 9 und 37.

f) $(\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15}) \cdot (-\sqrt{-5} - \sqrt{-6} + \sqrt{-15})$

f) Ausrechnung nach Erkl. 36 durchzuführen.

g) $(\sqrt{-12} + \sqrt{-15}) \cdot (\sqrt{-48} - \sqrt{-60})$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 9, k).

h) $(7 \cdot \sqrt{-5} + 6 \cdot \sqrt{-3}) \cdot (2 \cdot \sqrt{-125} - 5 \cdot \sqrt{-27}) \cdot (3 \cdot \sqrt{-1} + 4 \cdot \sqrt{-2})$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern miteinander, wie in Aufgabe 9, k) gezeigt wurde. Hierauf vereinige man die gleichnamigen Glieder. Sodann multipliziere man die resultierenden Glieder mit der dritten Klammer und vereinige schliesslich das Gleichnamige.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 12. Wie werden zwei imaginäre Quadratwurzeln durch einander dividiert?

Antwort. Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell und gleich der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

Erkl. 38a. Nach der Divisionsregel ist, wenn $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ berechnet werden soll, der Faktor zu suchen, welcher mit $\sqrt{-b}$ zu multiplizieren ist, um $\sqrt{-a}$ hervorzubringen. Dieser Faktor ist gleich $\sqrt{\frac{a}{b}}$, denn man erhält:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b} \cdot (-b)} = \sqrt{-a}$$

Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \cdot 1$$

(nach Erkl. 19)

$$= \sqrt{\frac{a}{b}}$$ (nach Erkl. 31)

(siehe Erkl. 38a)

Frage 13. Was erhält man bei der Division zweier imaginären Zahlen, wenn:

a) der Dividendus eine imaginäre und der Divisor eine reelle Quadratwurzel,

Antwort.

a) Behauptung.

$$\sqrt{-a} : \sqrt{+b} = i \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) der Dividendus eine reelle und der Divisor eine imaginäre Quadratwurzel

ist?

Beweis.

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{-1}$$

(nach Erkl. 31)

$$= i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

b) Behauptung.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beweis.

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit $\sqrt{-1}$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\cdot(\sqrt{-1})^2}$$

Nun ist:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

und

$$\sqrt{-1} = i$$

folglich gibt:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\cdot\sqrt{a}}{-\sqrt{b}} = -i\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(nach den Erkl. 18 und 31)

Aus den beiden Entwicklungen folgt der Satz:

„Der Quotient aus einer imaginären und einer reellen Quadratwurzel ist imaginär und zwar positiv, wenn der Dividendus imaginär ist, und negativ, wenn derselbe reell ist."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 11. Was erhält man für:

a) $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}}$?

b) $\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}}$?

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 13, a) ist:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Setzt man für $b = a$, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{+a}} = i\cdot\sqrt{\frac{a}{a}} = i\cdot\sqrt{1} \text{ (nach Erkl. 19)}$$

$$= i$$

b) Nach der Antwort auf Frage 13, b) ist:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-b}} = -i\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Wird $b = a$, so folgt:

$$\frac{\sqrt{+a}}{\sqrt{-a}} = -i \cdot \sqrt{\frac{a}{a}} = -i\sqrt{1} = -i$$

c) $\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}}$?

c) $$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}} = 1$$

(Folgt auch direkt aus der Erkl. 19)

Aufgabe 12. Nachstehende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(-3\sqrt{-96}) : (-2 \cdot \sqrt{-6})$

b) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \dfrac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}}$

Erkl. 39. Zwei Brüche werden durch einander dividiert, indem man den Zähler des Dividendus mit dem Nenner des Divisors und den Nenner des Dividendus mit dem Zähler des Divisors multipliziert.

c) $\dfrac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \dfrac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}$

Auflösungen.

a) Nach Erkl. 18 und Antwort auf Frage 12 gibt:

$$\frac{-3 \cdot \sqrt{-96}}{-2 \cdot \sqrt{-6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{96}{6}} = +\frac{3}{2} \cdot \sqrt{16}$$

$$= +\frac{3}{2} \cdot 4 = +6$$

b) Nach Erkl. 39 und 9 ist:

$$\frac{2 \cdot \sqrt{-5}}{3 \cdot \sqrt{6}} : \frac{4 \cdot \sqrt{-12}}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{2 \cdot \sqrt{-5} \cdot 5 \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot \sqrt{6} \cdot 4 \cdot \sqrt{-12}}$$

$$= \frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}}$$

Nun ist:

$$\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-72}} = \sqrt{\frac{50}{72}}$$

(nach Antwort auf Frage 12)

oder:

$$= \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

Folglich ist:

$$\frac{10 \cdot \sqrt{-50}}{12 \cdot \sqrt{-72}} = \frac{10 \cdot 5}{12 \cdot 6} = \frac{25}{36}$$

c) $$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd}}{cd \cdot \sqrt{-ab}} : \frac{a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}}{cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}} = \frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d}},$$

(nach Erkl. 39)

Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{-cd} \cdot \sqrt{-a^3b^5} = -\sqrt{a^3b^5cd} \\ \text{und} \\ \sqrt{-ab} \cdot \sqrt{-c^3d^5} = -\sqrt{abc^3d^5} \end{array}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 8)}$$

also gibt:

$$\frac{ab \cdot \sqrt{-cd} \cdot cd^2 \cdot \sqrt{-a^3b^5}}{cd \cdot \sqrt{-ab} \cdot a^2b \cdot \sqrt{-c^3d^5}} = \frac{-abcd^2 \cdot \sqrt{a^3b^5cd}}{-a^2bcd \cdot \sqrt{abc^3d^5}}$$

$$= +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^3b^5cd}{abc^3d^5}} = +\frac{d}{a} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^4}{c^2d^4}} = +\frac{ab^2d}{acd^2} = \frac{b^2}{cd}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

d) $\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$

d) Nach Erkl. 40 erhält man für:

$$\left(\sqrt{-2}-\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-18}\right):\sqrt{-8}$$

$$=\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}-\frac{\sqrt{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-8}}+\frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-8}}$$

oder;

$$=\sqrt{\frac{2}{8}}-\sqrt{\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{18}{8}}$$

(siehe Antwort auf Frage 12)

oder:

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=1\frac{3}{4}$$

Erkl. 40. Eine mehrgliederige (Klammer-) Grösse wird durch eine eingliederige dividiert, indem man jedes Glied der Klammer durch den Divisor dividiert.

e) $(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180}):(-2\cdot\sqrt{-5})$

e) Es ist:

$$\frac{(14\cdot\sqrt{-20}+15\cdot\sqrt{45}-16\cdot\sqrt{-245}-18\cdot\sqrt{180})}{(-2\cdot\sqrt{-5})}$$

$$=\frac{14\cdot\sqrt{-20}}{-2\cdot\sqrt{-5}}+\frac{15\cdot\sqrt{45}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{16\cdot\sqrt{-245}}{-2\cdot\sqrt{-5}}-\frac{18\cdot\sqrt{180}}{-2\cdot\sqrt{-5}}$$

(nach Erkl. 40)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{\frac{20}{5}}-7\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{45}{5}}\cdot(-i)+8\cdot\sqrt{\frac{245}{5}}+9\cdot\sqrt{\frac{180}{5}}\cdot(-i)$$

(siehe die Antworten auf die Fragen 12 und 13 und Erkl. 18)

oder:

$$=-7\cdot\sqrt{4}+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot\sqrt{9}+8\cdot\sqrt{49}-9i\sqrt{36}$$

$$=-7\cdot 2+7\frac{1}{2}\cdot i\cdot 3+8\cdot 7-9\cdot i\cdot 6$$

$$=-14+22\frac{1}{2}i+56-54i$$

$$=+42-31\frac{1}{2}i$$

f) $\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right):\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)$

f) Nach Erkl. 40 gibt:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}-\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}\right)}{\left(-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}\right)}=$$

$$\frac{\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{5}{6}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-\frac{96}{125}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}-\frac{\frac{5}{8}\cdot\sqrt{-\frac{6}{5}}}{-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}}}$$

Führt man die Division mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 13, a) aufgeführten Regel und der Erkl. 17 und 39 aus, so erhält man:

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{96\cdot 5}{125\cdot 6}}\cdot i + \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{1}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{6}}\cdot i$$

d. i.:

$$= -3i\cdot\frac{5}{6} - 2i\cdot\frac{4}{5} + \frac{5}{2}i\cdot 1$$

$$= -\frac{5}{1}i - \frac{8}{5}i + \frac{5}{2}i$$

$$= -1\frac{3}{5}i$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 13. Es sind folgende Divisionen auszuführen:

a) $(8\cdot\sqrt{-72}):\left(-4\cdot\sqrt{-\frac{1}{2}}\right)$

b) $(-xy^2\cdot\sqrt{-z^3}):(-x^2y\cdot\sqrt{z})$

c) $\dfrac{4\cdot\sqrt{+3}}{5\cdot\sqrt{-2}}:\dfrac{2\cdot\sqrt{-8}}{3\cdot\sqrt{+27}}$

d) $\left(\sqrt{-8}-\sqrt{+8}+\sqrt{-\frac{1}{8}}-\sqrt{+\frac{1}{8}}\right):\sqrt{-2}$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{-12}-6\cdot\sqrt{-27}+7\cdot\sqrt{-108}-8\cdot\sqrt{-75})}{(-2\cdot\sqrt{3})}$

f) $\left(\frac{7}{8}\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{6}\cdot\sqrt{\frac{3}{8}}-\frac{7}{12}\cdot\sqrt{-1\frac{1}{2}}\right):\left(-\frac{5}{42}\cdot\sqrt{-2\frac{2}{3}}\right)$

Erkl. 41. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem Nenner des Bruches multipliziert und durch den Zähler desselben dividiert.

Erkl. 41a. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man seinen Nenner mit derselben multipliziert.

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, a) unter Berücksichtigung der Erkl. 18 und 41 und der Antwort auf Frage 12.

b) Auflösung mit Hilfe der Erkl. 18 und der Antwort auf Frage 13, a) zu vollführen.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, b) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, d) unter Berücksichtigung von Erkl. 41a.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, e) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 13, a).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 12, f) unter Berücksichtigung der Antwort auf Frage 12 und 13.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 14. Was erhält man für:

$$(\sqrt{-a^2})^m$$

wenn:

a) $m = 4n$

b) $m = 4n+2$

ist?

Antwort. Ist $m = 4n$, so gibt:

$$(\sqrt{-a^2})^m = (\sqrt{-a^2})^{4n} = (\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{-1})^{4n} = a^{4n}\cdot i^{4n}$$