Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

3) $(r\cdot i)^{4n+2} = -r^{4n+2}$
4) $(r\cdot i)^{4n+3} = -r^{4n+3}\cdot i$
5) $(r\cdot i)^{-4n} = \left(\frac{1}{r}\right)^{4n}$
6) $(r\cdot i)^{-(4n+1)} = -\frac{i}{r^{4n+1}}$
7) $(r\cdot i)^{-(4n+2)} = -\left(\frac{1}{r}\right)^{4n+2}$
8) $(r\cdot i)^{-(4n+3)} = +\frac{i}{r^{4n+3}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln ergibt sich ohne weiteres aus den vorstehenden Antworten.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 14. Es sind mit Hilfe der in Antwort auf Frage 18 aufgeführten Formeln die nachfolgenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-5})^4$ e) $(\sqrt{-3})^{-8}$
b) $(\sqrt{-5})^5$ f) $(\sqrt{-3})^{-9}$
c) $(\sqrt{-5})^6$ g) $(\sqrt{-3})^{-10}$
d) $(\sqrt{-5})^7$ h) $(\sqrt{-3})^{-11}$

Erkl. 43. Ein Satz aus der Wurzellehre lautet:

„Eine Wurzel wird potenziert, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert."

In Zeichen: $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Erkl. 43a. Eine Potenz mit einem Bruchexponenten (sog. Bruchpotenz) ist eine andere Form für eine Potenz unter einer Wurzel, z. B.:

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5^1} = 5$$
$$6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} = \sqrt{216}$$

Erkl. 43b. Man erhält nach den beiden vorstehenden Erklärungen für:

$$(\sqrt{-5})^5 = +(\sqrt{5})^5\cdot i^5 = 5^{\frac{5}{2}}\cdot i$$
$$= 5^2\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{-5})^7 = +(\sqrt{5})^7\cdot i^7 = 5^{\frac{7}{2}}\cdot(-i)$$
$$= -5^3\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
$$(\sqrt{3})^9 = 3^{\frac{9}{2}} = 3^4\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 81\cdot\sqrt{3}$$
$$(\sqrt{3})^{11} = 3^{\frac{11}{2}} = 3^5\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 243\cdot\sqrt{3}$$

Auflösung.

a) $(\sqrt{-5})^4 = (\sqrt{5}\cdot i)^4 = (\sqrt{5})^4$ [nach Formel 1), $n = 1$ gesetzt].

Also gibt:

$$(\sqrt{-5})^4 = 5^2 \text{ (nach Erkl. 43)} = 25$$

b) $(\sqrt{-5})^5 = (\sqrt{-5})^{4\cdot 1+1}$
$= (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+1}$

also nach Formel 2):

$$= (\sqrt{5})^5\cdot i = 25\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

c) $(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+2}$

demnach nach Formel 3):

$$= -(\sqrt{5})^6 = -5^3 \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= -125$$

d) $(\sqrt{-5})^7 = (\sqrt{5}\cdot i)^{4\cdot 1+3}$

also nach Formel 4):

$$= -(\sqrt{5})^7\cdot i = -125\,i\sqrt{5}$$
(siehe Erkl. 43b).

e) $(\sqrt{-3})^{-8} = (\sqrt{-3})^{-4\cdot 2}$

demnach nach Formel 5), $n = 2$ gesetzt:

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8 = \frac{1^8}{3^4} \text{ (nach Erkl. 43)}$$
$$= \frac{1}{81}$$

f) $(\sqrt{-3})^{-9} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+1)}$
$= (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+1)}$

also nach Formel 6):

$$= -\frac{i}{(\sqrt{3})^9} = -\frac{i}{81\sqrt{3}}$$
(siehe Erkl. 34b).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $(\sqrt{-3})^{-10} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+2)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+2)}$

demnach nach Formel 7):

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} = -\frac{1}{3^5} \text{ (nach Erkl. 43)}$$

$$= -\frac{1}{243}$$

h) $(\sqrt{-3})^{-11} = (\sqrt{-3})^{-(4\cdot 2+3)} = (\sqrt{3}\cdot i)^{-(4\cdot 2+3)}$

also nach Formel 8):

$$= +\frac{i}{(\sqrt{3})^{11}} = +\frac{i}{243\sqrt{3}}$$

(siehe Erkl. 43 b).

Aufgabe 15. Nachfolgende Ausdrücke sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

Erkl. 44. Ein Satz aus der Potenzlehre lautet:

„Ein Bruch wird potenziert, indem man seinen Zähler und seinen Nenner potenziert."

In Zeichen:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Umgekehrt ist:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Erkl. 45. Werden Wurzeln mit gleichem Exponenten und gleichem Radikandus so oft miteinander multipliziert, als der Exponent Einheiten besitzt, so erhält man den Radikandus; z. B.:

$$\sqrt[2]{\frac{b}{c}}\cdot\sqrt[2]{\frac{b}{c}} = \sqrt[2]{\frac{b^2}{c^2}} \text{ (nach Erkl. 9)} = \frac{b}{c}$$

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

Erkl. 45 a. Nach den Erkl. 43 und 44 ist:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{7}{2}} = \frac{b^3\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^3\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^3}{c^3}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5 = \left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{5}{2}} = \frac{b^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}{c^2\cdot c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^2}{c^2}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}$$

Auflösung. a) Der Faktor:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7$$

oder:

$$= a^7\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+3}$$

folglich nach Formel 17) des Formelverzeichnisses:

$$= a^7\cdot\left[-\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^7\cdot i\right]$$

oder:

$$= -a^7\cdot\frac{b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Der Faktor:

$$\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

gibt nach Erkl. 42:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

oder:

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\cdot i\right)^{4\cdot 1+1}$$

folglich nach Formel 15):

$$= -a^5\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{c}}\right)^5\cdot i$$

oder:

$$= -a^5\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot i\sqrt{\frac{b}{c}} \text{ (s. Erkl. 45 a)}$$

Mithin erhält man für:

$$\left(+a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7\cdot\left(-a\cdot\sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$$

$$= \left(-\frac{a^7 b^3}{c^3}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)\cdot\left(-\frac{a^5 b^2}{c^2}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$$

$$= +\frac{a^{12} b^5}{c^5}\cdot i^2\cdot\frac{b}{c} \text{ (nach d. Erkl. 18 a, 23 u. 45)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder:

$$= -\frac{a^{12} b^6}{c^6}$$

weil $i^2 = -1$ ist.

b) $\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$

b) Der erste Faktor:

$$\left(+3 \cdot \sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

gibt nach Erkl. 42 und Antwort auf Frage 2

$$= +3^3 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot i^3$$

oder:

$$= +27 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (-i)$$

(nach Erkl. 43)

d. i.:

$$= -9i\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Der zweite Faktor:

$$\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5$$

ist nach Formel 15) des Formelverzeichnisses:

$$= -2^5 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^5 \cdot i \quad (\text{denn } 5 = 4 \cdot 1 + 1)$$

oder:

$$= -32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot i \quad (\text{nach Erkl. 43})$$

d. i.:

$$= -8i\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Mithin gibt:

$$\left(+3\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)^3 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^5 = \left(-9i\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left(-8i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = +72i^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

(nach den Erkl. 9 und 18a)

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= -72\sqrt{\frac{1}{6}}$$

c) $\dfrac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5}$

Erkl. 46. Es gibt:

$$(\sqrt{a^2b^3})^7 = \left(a^{\frac{2}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}\right)^7 = a^{\frac{14}{2}} \cdot b^{\frac{21}{2}} = \sqrt[2]{a^{14}b^{21}}$$

$$(\sqrt{a^3b^2})^5 = \left(a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{2}{2}}\right)^5 = a^{\frac{15}{2}} \cdot b^{\frac{10}{2}} = \sqrt[2]{a^{15}b^{10}}$$

c) Man erhält für:

$$\frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^7}{(+\sqrt{-a^3b^2})^5} = \frac{(-\sqrt{-a^2b^3})^{4\cdot 1+3}}{(+\sqrt{-a^3b^2})^{4\cdot 1+3}}$$

oder nach den Formeln 17) bezw. 15):

$$= \frac{-[-(\sqrt{a^2b^3})^7 \cdot i]}{+[(\sqrt{a^3b^2})^5 \cdot i]} = \frac{+i\sqrt{a^{14}b^{21}}}{+i\sqrt{a^{15}b^{10}}}$$

(siehe Erkl. 46)

oder:

$$= \sqrt{\frac{a^{14}b^{21}}{a^{15}b^{10}}} = \sqrt{\frac{b^{11}}{a}} = b^5 \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}$$

d) $\dfrac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \dfrac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2}$

Erkl. 47. Man erhält für:

$$(\sqrt{-8})^4 = (\sqrt{8})^4 \cdot i^4 = 8^2 \cdot 1 = +64$$

$$(-\sqrt{-2})^2 = (-\sqrt{2} \cdot i)^2 = (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$$

d) Nach Erkl. 39 ist:

$$\frac{(\sqrt{-8})^4}{(-\sqrt{-3})^3} : \frac{(\sqrt{-12})^5}{(-\sqrt{-2})^2} = \frac{(\sqrt{-8})^4 \cdot (-\sqrt{-2})^2}{(-\sqrt{-3})^3 \cdot (\sqrt{-12})^5} = \frac{(\sqrt{8})^2 \cdot (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1)}{i(\sqrt{3})^3 \cdot i \cdot (\sqrt{12})^5} = \frac{64 \cdot 2 \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 288 \cdot \sqrt{3} \cdot i^2} \quad \text{(s. Erkl. 47)}$$

oder:

$$= \frac{-64 \cdot 2}{-3 \cdot 288 \cdot 3} \quad \left\} \text{ [nach Erkl. 45 und Antw. auf Frage 4, c)]} \right.$$

oder:

$$= +\frac{4}{81}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 16. Es sind mit Hilfe der Formeln 14) bis 21) des Formelverzeichnisses die nachstehenden Potenzen zu berechnen:

a) $(\sqrt{-2})^{12}$ e) $(\sqrt{-6})^{-4}$
b) $(\sqrt{-2})^{13}$ f) $(\sqrt{-6})^{-5}$
c) $(\sqrt{-2})^{14}$ g) $(\sqrt{-6})^{-6}$
d) $(\sqrt{-2})^{15}$ h) $(\sqrt{-6})^{-7}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 14, a) bis 14, h).

Aufgabe 17. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\left(+a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^7 : \left(-a \cdot \sqrt{-\frac{b}{c}}\right)^5$

b) $\left(+4 \cdot \sqrt{-\frac{1}{2}}\right)^4 \cdot \left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{8}}\right)^5$

c) $(+a \cdot \sqrt{-ab^3})^3 \cdot (-b \cdot \sqrt{-a^3b})^4$

d) $\dfrac{(-3 \cdot \sqrt{-2})^8}{(+2 \cdot \sqrt{-3})^6}$

e) $\dfrac{(\sqrt{-5})^2}{(-\sqrt{-3})^5} : \dfrac{(-\sqrt{-27})^3}{(\sqrt{-2})^4}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, c).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, b).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, a).

d) Man bringe Zähler und Nenner des gegebenen Bruches für sich allein auf die kürzeste Form und führe hierauf erst die Division aus.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 15, d).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg