Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

B. Ueber die komplexen Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

B. Ueber die komplexen Zahlen.

Anmerkung 5. Zum Verständnis der nachfolgenden Lösungen von Problemen sind die in der Anmerkung 3 erwähnten Vorkenntnisse ausreichend.

1) Ueber die komplexen Zahlen im allgemeinen.

Frage 19. Was versteht man unter einer komplexen oder lateralen Zahl und wie wird eine solche Zahl dargestellt?

Antwort. Unter einer komplexen oder lateralen Zahl versteht man einen, aus einem reellen und einem imaginären Gliede zusammengesetzten Ausdruck von der Form:

$$a + bi$$

in welchem a und b irgend welche, positiven oder negativen, reellen Zahlen bedeuten.

Erkl. 48. Das Wort „komplex" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „zusammengesetzt" oder „vereinigt".

Erkl. 49. Die zweigliederigen Ausdrücke von der Form $a + bi$ werden nach Cauchy (Anal. algébr. 1821) „komplexe Zahlen" oder auch kurz „Komplexe", nach Gauss (Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. societ. Gotting. Vol. VII, 1828 bis 1832, pag. 96) „laterale Zahlen" oder kurz „Laterale" [d. h. „seitwärts liegende" vom Lat. latus (Seite); vergl. Abschnitt C.] und nach Mourey „nombres directives" (auf deutsch „Richtungszahlen") genannt. Am gebräuchlichsten ist jedoch die von Cauchy eingeführte Bezeichnung.

Erkl. 49a. Die beiden Glieder der komplexen Zahl können nicht miteinander verglichen werden, weil sie verschiedenen Zahlengebieten angehören. Das sie verbindende + Zeichen deutet nur einen Zusammenhang der beiden Glieder an und darf nicht als ein Additionszeichen angesehen werden, weil durch ein solches nur gleichartige Zahlen (reelle Zahlen mit reellen oder imaginäre Zahlen mit imaginären) verbunden werden können.

Frage 20. Wie viele komplexe Zahlen lassen sich mit Rücksicht auf die Zeichen bilden?

Antwort. Je nachdem die reellen Bestandteile a und b positiv oder negativ sind, erhält man folgende vier, nur durch die Zeichen von einander abweichende komplexe Zahlen:

$$+a + bi$$
$$-a + bi$$
$$+a - bi$$
$$-a - bi$$

Frage 21. Was versteht man unter zwei konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Unter zwei konjugierten komplexen Zahlen versteht man Komplexe, die nur durch das Zeichen

Erkl. 50. Das Wort „konjugiert“ stammt vom lateinischen Worte conjugere und bedeutet „verbunden“ oder „zusammengehörig“.

Erkl. 50a. Die Bezeichnung „konjugierte komplexe Zahlen“ für zwei Komplexe von der Form $a+bi$ und $a-bi$ wurde zuerst von Cauchy (Anal. algébr. c. 7, 1821) gebraucht.

Erkl. 50b. Lejeune Dirichlet (Ueber die Theorie der komplexen Zahlen) nennt „zusammengehörig“ vier komplexe Zahlen:

$$a+bi;\quad -b+ai;\quad -a-bi;\quad b-ai$$

welche so von einander abhängen, dass irgend drei derselben aus der vierten entstehen, wenn man diese mit -1, $\pm i$ multipliziert.

des imaginären Gliedes von einander abweichen.

Hiernach ist das Konjugierte von $a+bi$ die Komplexe $a-bi$ und von $-a+bi$ die komplexe Zahl $-a-bi$ — und umgekehrt.

Frage 22. Wann nennt man zwei komplexe Zahlen associiert?

Erkl. 51. Das Wort „associiert“ (vom französischen Worte associer stammend) bedeutet „zugesellt“ oder „vereinigt“, auch „verbunden“.

Antwort. Zwei komplexe Zahlen heissen associiert, wenn sie gleiche Zahlenwerte, aber entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Hiernach sind associierte komplexe Zahlen: $a+bi$ und $-a-bi$.

2) Ueber die komplexen Zahlen im besondern.

Frage 23. Was versteht man unter einer veränderlichen und was unter einer stetig veränderlichen komplexen Zahl?

Erkl. 52. Man unterscheidet unveränderliche oder konstante und veränderliche oder variable Grössen. „Unveränderliche“ oder „Konstante“ sind solche Grössen, die unveränderlich sind oder gedacht werden, „Veränderliche“ oder „Variable“ dagegen solche, die Veränderungen erleiden oder denen solche zugedacht werden können. Eine Zu- oder Abnahme einer Grösse kann nur dann eintreten, wenn diese Grösse selbst eine „Veränderliche“ ist.

Erkl. 52a. Die Wörter „variabel“ und „konstant“ stammen aus dem Lateinischen; ersteres von varius, d. h. „wechselnd“, letzteres von constans, d. h. „beständig“.

Antwort. Man erhält alle zu dem reellen Bestandteile a gehörigen komplexen Zahlen, wenn die Zahl b die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, und überhaupt alle komplexen Zahlen, wenn weiter a der Reihe nach alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden (reellen) Werte annimmt. — Verändern sich die beiden reellen Bestandteile a und b der Komplexen $a+bi$ sprungweise, d. h. haben die aufeinanderfolgenden Werte dieser Zahlen irgend welche Differenzen oder verändert sich nur eine von ihnen entweder sprungweise oder stetig (d. h. ununterbrochen, so dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte unendlich klein ist), so nennt man die komplexe Zahl eine „veränderliche Komplexe“. — Verändern sich dagegen die beiden reellen Bestandteile stetig, so dass einer unendlich kleinen Zunahme (bezw. Abnahme) von a eine

unendlich kleine Zunahme (bezw. Abnahme) von b entspricht, so nennt man die komplexe Zahl eine „stetig veränderliche Komplexe“.

Frage 24. Was wird aus der komplexen Zahl $a+bi$, wenn einer ihrer reellen Bestandteile oder beide gleichzeitig Null oder unendlich gross werden?

Erkl. 53. Die komplexen Zahlen umfassen alle Zahlen. $a+bi$ geht in die reelle Zahl a über, wenn b zu Null wird, und in die rein imaginäre Zahl bi, wenn a verschwindet. Da sich alle imaginären Zahlen, wie im ersten Teile dieses Werkes nachgewiesen wurde, auf die imaginäre Einheit zurückführen lassen, so ist es möglich, jede imaginäre Zahl mit Hilfe von $\sqrt{-1}$ auf die Form $a+b\cdot\sqrt{-1}$ zu bringen [vergl. Aufgabe 39, e)].

Erkl. 53a. Die allgemeine Form der Zahlen ist die komplexe. Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Erkl. 53.

Erkl. 54. Dass $a+bi=0$ ist, wenn sowohl $a=0$ als auch $b=0$ ist, lässt sich auch, wie folgt, beweisen. Die beiden Glieder der Komplexen sind ungleichartig, sie können sich also unmöglich gegenseitig aufheben, und es kann daher nur dann die komplexe Zahl verschwinden, wenn jedes Glied derselben gleichzeitig gleich Null ist.

Antwort. Wird in der komplexen Zahl $a+bi$ der reelle Bestandteil a gleich Null, so erhält man:

$$a+bi=0+bi=bi$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird zu einer rein imaginären, wenn ihr reelles Glied verschwindet.“

Wird dagegen b gleich Null, so ergibt sich:

$$a+bi=a+0\cdot i=a$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl geht in eine reelle über, wenn ihr imaginäres Glied verschwindet.“

Sind beide reellen Bestandteile gleichzeitig gleich Null, so wird aus:

$$a+bi=0+0\cdot i=0$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird zu Null, wenn ihr reelles und ihr imaginäres Glied gleichzeitig gleich Null werden.“ (Siehe Erkl. 5.)

Setzt man $a=\infty$, so erhält man:

$$a+bi=\infty+bi=\infty$$

und für $b=\infty$:

$$a+bi=a+\infty\cdot i=\infty$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird unendlich gross, wenn einer ihrer reellen Bestandteile (oder beide gleichzeitig) unendlich gross werden.“

Frage 25. Wann sind zwei komplexe Zahlen einander gleich?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn sie sowohl in ihren reellen als auch in ihren imaginären Gliedern vollständig übereinstimmen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Behauptung.

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

wenn $a = \alpha$ und $bi = \beta i$ oder $b = \beta$ ist.

Beweis. Aus $a + bi = \alpha + \beta i$ folgt nach Erkl. 55:

$$a + bi - \alpha - \beta i = 0$$

oder:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0 \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Wäre nun $(b - \beta) \gtrless 0$, so würde $(a - \alpha)$, d. h. die Differenz zweier reellen Zahlen gleich einer imaginären Zahl sein. Da dieses widersinnig ist, so muss $(b - \beta) = 0$, d. h. $b = \beta$ und demnach auch $a = \alpha$ sein.

Erkl. 55. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Man kann Glieder beliebig von der einen Seite der Gleichung auf die andere schaffen (transponieren), wenn man dabei ihre Vorzeichen umkehrt."

3) Ueber das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Anmerkung 6. Da die komplexen Zahlen zweigliedrige Ausdrücke (sogen. Binomien) sind, so werden die für das Rechnen mit mehrgliedrigen Zahlen in der niederen Algebra aufgestellten Gesetze auch auf sie angewendet werden können, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen.

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 26. Wie werden zwei (oder mehrere) komplexe Zahlen addiert?

Antwort. Die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Summe der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Summe der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält für:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = a + \alpha + bi + \beta i = (a + \alpha) + (b + \beta) \cdot i \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Erkl. 56. Die allgemeine Formel für die Summe zweier komplexer Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) + (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta) \cdot i$$

Frage 27. Was gibt die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b) \cdot i = 2a$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 28. Was gibt die Summe zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b) \cdot i = 0$$

In Worten:

„Die Summe zweier associierten komplexen Zahlen ist gleich Null."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 29. Wie werden zwei komplexe Zahlen von einander subtrahiert?

Erkl. 57. Vorstehende Frage lässt sich auch wie folgt beantworten:

„Man subtrahiert zwei komplexe Zahlen von einander, indem man das reelle Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus und das imaginäre Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert."

Erkl. 58. Die allgemeine Formel für die Differenz zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) - (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta) \cdot i$$

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Differenz der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Differenz der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = a + bi - \alpha - \beta i$$

(nach Erkl. 28a)

oder: $= (a - \alpha) + (b - \beta) i$

(nach Erkl. 26)

Frage 30. Wann ist die Differenz zweier komplexen Zahlen gleich Null?

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist gleich Null, wenn das reelle Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus und zugleich das imaginäre Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus ist.

Behauptung.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = 0$$

wenn $\alpha = a$ und $\beta i = bi$ oder $\beta = b$ ist.

Beweis.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a - \alpha) + (b - \beta) i$$

(nach Antwort auf Frage 29)

Ist nun $\alpha = a$ und $\beta = b$, so erhält man für:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a + bi) - (a + bi) = (a - a) + (b - b) i = 0 + 0 i = 0$$

Frage 31. Was gibt die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 59. Ist die Komplexe $(a - bi)$ der Minuendus, so erhält man als Differenz eine negative imaginäre Zahl.

Denn es gibt:

$$(a - bi) - (a + bi) = a - bi - a - bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder: $= -2bi$

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder: $= +2bi$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen ist imaginär."

Frage 32. Was erhält man für die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) - (-a - bi) = a + bi + a + bi$$

(nach Erkl. 28a

Erkl. 60. Ist die Komplexe $(-a-bi)$ der Minuendus, so erhält man eine negative Differenz.

Denn es gibt:

$$(-a-bi)-(a+bi) = -a-bi-a-bi$$
$$= -2\cdot(a+bi)$$

oder: $= 2a+2bi$

d. i.: $= 2\cdot(a+bi)$

(nach Erkl. 26)

In Worten:

„Die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 18. Nachfolgende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$
$+(i\cdot\sqrt{-81}-i\sqrt{64})$

b) $\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$
$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$
$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$

Auflösungen. (Siehe die Anmerkungen 4 und 6.)

a) Sondert man zunächst die imaginäre Einheit ab und zieht man die Wurzeln, so erhält man für:

$$(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$$
$$+(i\sqrt{-81}-i\sqrt{64}) =$$
$$(6+5i)+(7i-24)+(9i^2-8i)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist [siehe Frage 4, c)]:

$$= (6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$

Nach Antwort auf Frage 26 gibt aber:

$$(6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$
$$= (6-24-9)+(5+7-8)\cdot i$$

oder:

$$= -27+4i$$

---

b) Nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Ausziehen der Wurzeln gibt:

$$\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$$
$$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$$
$$=\left(3\cdot6\cdot a\cdot i+4\cdot\frac{3}{2}\cdot b^2\right)$$
$$+\left(5\cdot b^2\cdot\frac{7}{5}-6\cdot a\cdot 9\cdot i\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\frac{4\cdot b}{a}-8a\cdot 4\cdot i\right)$$

oder:

$$= (18ai+6b^2)+(7b^2-54ai)$$
$$+(28b^2-32ai)$$

Die Summe dieser komplexen Zahlen ist nach Antwort auf Frage 26:

$$= (6b^2+7b^2+28b^2)+(18a-54a-32a)\cdot i$$

oder:

$$= 42b^2-68ai$$

---

c) $(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})$

c) Man erhält für:

$$(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})=(-ai\cdot b^2\cdot i+abi)+(ab^2-abi)$$

oder:

$$=(-ab^2i^2+abi)+(ab^2-abi)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$=(ab^2+abi)+(ab^2-abi)$$

Die Summe dieser konjugierten Komplexen gibt nach Antwort auf Frage 27:

$$=+2ab^2$$

---

d) $(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)$

d) Es ist:

$$(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)=$$

$$(0{,}6+0{,}8\,i)-(0{,}6-0{,}8\,i)=+1{,}6\,i$$

(nach Antwort auf Frage 31)

---

e) $(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$

e) Es gibt der Minuendus:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})=(-2\cdot10-4\cdot6i)$$

weil $i^2=-1$ ist, oder:

$$=(-20-24i)$$

und der Subtrahendus:

$$\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)=(2i\cdot9i-4\cdot5{,}5\cdot i)$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist [siehe Frage 4, a)], oder:

$$=(-18-22i)$$

Mithin erhält man für:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\cdot\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$$

$$=(-20-24i)-(-18-22i)$$

$$=(-20+18)+(-24+22)\cdot i$$

(nach Erkl. 58)

oder:

$$=-2-2i=-2\cdot(1+i)$$

(nach Erkl. 26)

---

f) $\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$
$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\tfrac{1}{4}}\right)\right]$
$-\left(3\cdot\sqrt{-1\tfrac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\tfrac{9}{16}}\right)$

f) Man erhält nach Absonderung der imaginären Einheit für:

$$\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512}+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\frac{1}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3\cdot\sqrt{-1\frac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\frac{9}{16}}\right)$$
$$=i\cdot\sqrt{49}+\left[(4-i\sqrt{64})-\left(i\cdot\sqrt{100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3i\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-i\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3i\cdot\sqrt{\frac{16}{9}}-5i^2\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}\right)$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ setzt:

$$=7i+[(4-8i)-(10i+2)]-$$
$$\left[(15i+32)+\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right]-\left(4i+\frac{25}{4}\right)$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 26 und 29:

$$=7i+(2-18i)-$$
$$\left(34+13\frac{1}{2}i\right)-\left(6\frac{1}{4}+4i\right)$$

oder:

$$=\left(2-34-6\frac{1}{4}\right)+\left(7-18-13\frac{1}{2}-4\right)i$$

d. i.:

$$=-38\frac{1}{4}-28\frac{1}{2}i$$
$$=-\left(38\frac{1}{4}+28\frac{1}{2}i\right)$$

---

g) $(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169})]+(4+\sqrt{-576})\right\}$
$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$

g) Es gibt nach dem Ausziehen der Wurzeln:

$$(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169}]+(4+\sqrt{-576})\right\}$$
$$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$$
$$=(2+3i)-\left\{(1-12i)+[(2+10i)-(3-13i)]+(4+24i)\right\}$$
$$-\left\{(5-2i)-[(6+6i)-(7-20i)]+(8+14i)\right\}$$

oder nach Auflösung der runden Klammern

$$=2+3i-\left\{1-12i+[2+10i-3+13i]+4+24i\right\}$$
$$-\left\{5-2i-[6+6i-7+20i]+8+14i\right\}$$

oder kürzer:

$$=2+3i-\left\{5+12i+[-1+23i]\right\}-\left\{13+12i-[-1+26i]\right\}$$

sodann nach Auflösung der eckigen Klammern

$$=2+3i-\left\{5+12i-1+23i\right\}-\left\{13+12i+1-26i\right\}$$

und nach Vereinigung der Glieder in den Klammern:

$$= 2 + 3i - \{4 + 35i\} - \{14 - 14i\}$$

endlich nach Auflösung der letzten Klammern:

$$= 2 + 3i - 4 - 35i - 14 + 14i \quad \text{(nach Erkl. 28 a)}$$

d. i.:

$$= -16 - 18i$$

oder:

$$= -2 \cdot (8 + 9i) \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 19. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{121} + \sqrt{-289}) + (\sqrt[3]{729} - 2 \cdot \sqrt{-256}) + (i \cdot \sqrt{-225} - i \cdot \sqrt{324})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, a).

b) $(2 \cdot \sqrt[3]{125} + 3 \cdot \sqrt{-16}) - \left(-\frac{i}{3} \cdot \sqrt{-729} + \sqrt{-121}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, e).

c) $\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{4} a^2 b^4} + 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{27} a^6}\right) + \left(4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} + a \cdot \sqrt{-b^4}\right)$

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 32 durchzuführen.

d) $(0{,}45 + \sqrt{-3{,}61}) - \left(\frac{9}{20} - 1{,}9\,i\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, d).

e) $\sqrt{-\frac{9}{25}} - \left[\left(5 - \sqrt{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\sqrt{-12\frac{1}{4}} + 4 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)\right]$
$- \left[\left(3 \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt{-2\frac{14}{25}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{16}} + 2\right)\right]$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, f).

f) $(3 + \sqrt{-400}) - \{(4 - \sqrt{-256}) + [(5 + \sqrt{-1296}) - (6 - \sqrt{-900})]$
$- [(7 - \sqrt{-625}) + (8 + \sqrt{-441})] - (9 - \sqrt{-529})\}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, g).

g) $\left(-\sqrt[3]{-\frac{343x^3}{y^6 z^9}} + 2x \cdot \sqrt{-144 y^2 z^2}\right) + \left(\frac{7x}{y^2 z^3} + 24 x^3 y^2 i \cdot \sqrt{-\frac{z^2}{x^4 z^2}}\right)$

g) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 27 durchzuführen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 33. Wie werden zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert?

Erkl. 61. Da sich imaginäre Zahlen mit reellen multiplizieren lassen (vergl. Erkl. 34), so lässt sich das Produkt zweier komplexen Zahlen nach der für das Produkt zweier mehrgliedrigen Grössen aufgestellten Regel entwickeln.

Erkl. 61a. Die allgemeine Formel des Produktes zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi)\cdot(\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a\alpha \mp b\beta) + (\pm \alpha b \pm a\beta)\cdot i$$

Erkl. 62. Sollen mehr als zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert werden, so multipliziere man zuerst irgend zwei derselben und die sich hieraus ergebende Komplexe mit der dritten u. s. f.

Antwort. Man erhält (nach Erkl. 36) für:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = a\alpha + bi\alpha + a\beta i + b\beta i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= (a\alpha - b\beta) + (\alpha b + a\beta)\cdot i$$

Hieraus ergeben sich die Sätze:

1) „Zwei komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Komplexen mit jedem Gliede der anderen multipliziert und die Produkte addiert."
2) „Das Produkt zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

Frage 34. Wie wird eine Komplexe mit irgend einer

a) reellen,
b) imaginären

Zahl multipliziert?

Erkl. 63. Das gleiche Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man, wenn man in dem Produkte $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$ für $\beta = 0$, bezw. für $\alpha = 0$ setzt. Ist $\beta = 0$, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = (a+bi)\cdot\alpha$$
$$= (a\alpha - b\cdot 0) + \alpha b + a\cdot 0)\, i$$

(nach Antwort auf Frage 33)

oder:

$$= a\alpha + \alpha b i$$

Ist $\alpha = 0$, so erhält man:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = (a+bi)\cdot\beta i$$
$$= (a\cdot 0 - b\beta) + (0\cdot b + a\beta)\, i$$

oder:

$$= -b\beta + a\beta i$$

Antwort. Eine komplexe Zahl wird mit irgend einer (reellen oder imaginären) Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Komplexen mit der Zahl multipliziert. (Dies folgt aus Erkl. 34.)

Es gibt:

$$(a+bi)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + \alpha b i$$

und

$$(a+bi)\cdot\beta i = a\beta i + b\beta i^2 = a\beta i - b\beta$$

Frage 35. Was erhält man für das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 64. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man bei Anwendung der Erkl. 37. Hiernach gibt:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Antwort. Es ist:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = (a\cdot a + b\cdot b) + (ab - ab)\, i$$

oder:

$$= a^2 + b^2$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) „Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 65. Die reelle, durch $(a+bi)$ und $(a-bi)$ teilbare, stets positive Zahl (a^2+b^2) wird nach Gauss (Theor. resid. biqu. 30) die „Norm" der Komplexen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ genannt. Die positive Quadratwurzel aus dem Produkte zweier konjugierten komplexen Zahlen wird nach Cauchy (Anal. algèbr.) mit dem Worte „Modulus" oder „Modul" bezeichnet. Der Modul der komplexen Zahlen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ ist demnach $\sqrt{a^2+b^2}$. (Vergl. auch Antwort auf Frage 55.)

Erkl. 66. Die Norm ist gleich dem Quadrate des Modulus.

Erkl. 67. Da die Norm von $(a+bi)$ gleich (a^2+b^2) und die von $(a-bi)$ ebenfalls gleich (a^2+b^2) ist (nach Erkl. 65), so ist die Norm des Produktes von $(a+bi)\cdot(a-bi)$ gleich $(a^2+b^2)\cdot(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$. Allgemein erhält man als Norm des Produktes der beiden Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ die Zahl $(a\cdot\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$ (siehe Antwort auf Frage 33). Denn setzt man hierin für $\alpha=a$ und für $\beta=-b$, so erhält man:

$$(a^2+b^2)^2+(ab-ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

wie vorher für die Norm von $(a+bi)\cdot(a-bi)$.

Erkl. 68. Die Worte „Norm" und „Modulus" stammen aus dem Lateinischen. Ersteres bedeutet „Richtschnur", letzteres „Maass".

(Vergl. auch Teil C.)

Frage 36. Was erhält man für das Produkt zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)\cdot(-a-bi)=-a^2-abi-abi-b^2i^2$$

oder, da $i^2=-1$ ist:

$$=-a^2-2abi+b^2$$

Frage 37. Was gibt die Norm (der Modulus) des Produktes zweier (oder auch beliebig vieler) komplexen Zahlen?

Erkl. 69. Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

Erkl. 70. Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermindert um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Antwort. Die Norm des Produktes der beiden komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ ist nach Erkl. 67 die reelle Zahl:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$$

Löst man die Quadrate auf, so ergibt sich:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2$$
$$-2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2+2a\alpha b\beta$$

(nach den Erkl. 69 und 70)

oder:

$$=(a^2\alpha^2+\alpha^2b^2)+(a^2\beta^2+b^2\beta^2)$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\alpha^2\cdot(a^2+b^2)+\beta^2\cdot(a^2+b^2)$$

d. i.:

$$=(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$$

2) „Das Produkt zweier konjugierten Zahlen ist gleich ihrer Norm (oder gleich dem Quadrate ihrer Moduln)."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 71. Das in der Antwort auf Frage 37 entwickelte Gesetz lässt sich auf jedes Produkt von zwei, die Summe zweier Quadrate darstellenden Zahlen anwenden; dieses Produkt wird immer gleich der Summe zweier Quadrate sein; z. B. gibt:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (5\cdot 4-6\cdot 3)^2 + (4\cdot 6+5\cdot 3)^2 = 2^2+39^2$$

denn:

$$2^2+39^2 = 4+1521 = 1525$$

Dasselbe erhält man aber auch auf folgendem, einfacherem Wege. Es ist:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (25+36)\cdot(16+9) = 61\cdot 25 = 1525$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Normen der einzelnen Faktoren."

[Auf gleiche Weise erhält man auch für den Modulus des Produktes der Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$:

$$\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

In Worten:

„Der Modulus des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Moduln der einzelnen Faktoren."]

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 20. Nachstehende Produkte sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27}$

b) $(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$

c) $4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89})$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 34 erhält man für:

$$(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27} = 18i\sqrt{27}-i^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$$

oder, wenn man den Radikandus 27 in zwei Faktoren so zerlegt, dass wenigstens die Wurzel gezogen werden kann, und die Erkl. 9 berücksichtigt:

$$= 18i\cdot\sqrt{9\cdot 3}-i^2\cdot\sqrt{81}$$

d. i.:

$$= 54i\sqrt{3}+9$$

weil $i^2 = -1$ ist.

---

b) Für:

$$(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$$

kann man auch schreiben:

$$(9-12i)\cdot(3+5i)$$

und dieses Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 33:

$$= 9\cdot 3-12i\cdot 3+9\cdot 5i-12i\cdot 5i = (27+60)+(-36+45)i$$

d. i.:

$$= 87+9i$$

---

c) Nach Absonderung der imaginären Einheit erhält man für:

$$4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89}) = 4i\cdot\sqrt{2{,}25}\cdot(3i^2\cdot\sqrt{2{,}56}-2i\cdot\sqrt{2{,}89})$$

und wenn man die Wurzeln zieht und nach der Antwort auf Frage 34 ausmultipliziert:

$$= 4 \cdot 1{,}5 \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot i^3 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot i^2 = 28{,}8\, i^3 - 20{,}4\, i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$= 20{,}4 - 28{,}8\, i$$

d) $(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49})$

d) Es gibt:

$$(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49} = (9 - 6\, i^3) \cdot (3 + 7\, i)$$

oder, weil $i^3 = -i$ ist:

$$= (9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i)$$

Nach der Antwort auf Frage 33 erhält man aber für:

$$(9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i) = (9 \cdot 3 - 6 \cdot 7) + (3 \cdot 6 + 9 \cdot 7)\, i$$

$$= (27 - 42) + (18 + 63)\, i$$

d. i.:

$$= -15 + 81\, i$$

e) $\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right)$

e) Zunächst erhält man nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Wurzelziehen für:

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right) = \left(\frac{2{,}5\, b}{a} + \frac{1{,}4\, i}{a}\right) \cdot \left(\frac{5\, b}{a} - \frac{1{,}4\, i}{a}\right)$$

also zwei konjugierte komplexe Zahlen.

Ihr Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 35:

$$= \left(\frac{2{,}5\, b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1{,}4}{a}\right)^2$$

oder:

$$= \frac{6{,}25\, b^2}{a^2} + \frac{1{,}96}{a^2}$$

oder nach Erkl. 26:

$$= \frac{1}{a^2} \cdot (6{,}25\, b^2 + 1{,}96)$$

f) $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= +\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2$$

oder:

$$= +\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = +1$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$

g) Man erhält nach Erkl. 35 für:

$$\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$$
$$=2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{7}-3i\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$$
$$-4i^2\cdot\sqrt{343}\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}$$
$$+3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{7}+4i^3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{343}$$

oder nach Erkl. 9:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}-3i\cdot\sqrt{7^2}-4i^2\cdot\sqrt{2401}-2i^2\cdot\sqrt{\left(5\frac{1}{7}\right)^2}$$
$$+3i^2\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}+4i^3\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 343}$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ und $i^3=-i$ setzt:

$$=12i-21i+196+10\frac{2}{7}-18-168i$$

oder vereinigt:

$$=188\frac{2}{7}-177i$$

h) $(x-y-zi)\cdot(-x-y+zi)$

h) Wenn man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten multipliziert, so erhält man:

$$(x-y-zi)\cdot(-x)=-x^2+xy+xzi$$

(nach Antwort auf Frage 34)

und wenn man die erste Klammer nur mit dem zweiten Gliede der zweiten multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(-y)=-xy+y^2+yzi$$

und wenn man sie schliesslich nur mit dem letzten Gliede multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(+zi)=xzi-yzi+z^2$$

Folglich gibt:

$$(x-y-zi)\cdot(-x+y+zi)=-x^2+xy+xzi-xy+y^2+yzi+xzi-yzi+z^2$$

oder vereinigt:

$$=x^2+y^2+z^2+2xzi$$

i) $\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$

i) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$=12i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}-36i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}+36i^2\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$$
$$+i\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{48}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{48}+3i\cdot\sqrt{48}$$
$$-2i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+6i\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-6i^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Erkl. 72. Man erhält für:

$\sqrt{1152} = \sqrt{579 \cdot 2} = 24 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

$6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{6}} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{2} = 1{,}414$

$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408$

$\sqrt{3} = 1{,}732$

Erkl. 72a. Genügt ein nur auf 3 Dezimalstellen genaues Resultat, so ist:

$$-2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$-2 \cdot (8 + 12{,}726 + 4{,}896) + 12i(-1 + 2{,}828 + 1{,}732) =$$

$$-51{,}244 + 42{,}720i$$

und wenn man $i^2 = -1$ setzt und nach Erkl. 9 verfährt:

$$= -12 \cdot \sqrt{4} - 36i \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + i \cdot \sqrt{1152} - 3 \cdot \sqrt{72} + 3i\sqrt{48} + 2 \cdot \sqrt{16} + 6i\sqrt{1} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und, falls man soweit als möglich die Wurzeln zieht (siehe Erkl. 72) und für $\sqrt{1} = 1$ setzt:

$$= -24 - 18i - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + 24i\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 12i\sqrt{3} + 8 + 6i + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$$

oder vereinigt:

$$= -16 - 18 \cdot \sqrt{2} - 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - 12i + 24i\sqrt{2} + 12i\sqrt{3}$$

oder:

$$= -2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

(siehe Erkl. 72a)

Aufgabe 21. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl $3 + 4i$ zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 65 ist die Norm von $3 + 4i$ die Zahl:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = +25$$

und der Modulus die Zahl:

$$\sqrt{+25} = +5$$

weil letzterer ebenfalls stets positiv genommen werden muss. (Vergl. Abschnitt C.)

Aufgabe 22. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \text{ und } (3 - 5 \cdot \sqrt{-1})$$

zu ermitteln.

Auflösung. Nach Erkl. 67 ist die Norm von:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \cdot (3 - 5\sqrt{-1})$$

die reelle Zahl:

$$(2 \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5)^2 + (3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 5)^2$$

oder nach der Antwort auf Frage 37:

$$= [2^2 + (2 \cdot \sqrt{3})^2] \cdot [3^2 + (5)^2] = (4 + 12) \cdot (9 + 25) = 16 \cdot 34 = +544$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{+544} = 23{,}32 \cdots$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 23. Man soll die nachfolgenden Produkte auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(0{,}2 + i\sqrt{0{,}01}) \cdot \sqrt{-0{,}09}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, a).

b) $(3-2\sqrt{-1})\cdot\left(2+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{9}}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, b).

c) $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}-i^2\cdot\sqrt{-16}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{324}-2\cdot\sqrt{-4}\right)$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, e).

d) $\left(-\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, f).

e) $\left(\sqrt{-x}+\sqrt{y}-\sqrt{-xy}-\sqrt{-\frac{x}{y}}\right)\cdot\sqrt{-xy}$

e) Auflösung nach der Antwort auf Frage 34 durchzuführen.

f) $(a-b-ci)\cdot(a+b+ci)$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, h).

g) $\left(2\cdot\sqrt{-6}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4i\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{-6}-7\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+10i\right)$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, i).

(Für $\sqrt{+1}$ ist $+1$ zu setzen.)

h) $(1+i)\cdot(-1-i)\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern und darauf die beiden letzten Klammern und schliesslich die aus beiden Produkten sich ergebenden Werte miteinander (nach der Antwort auf Frage 33) und vereinige das Gleichnamige.

Aufgabe 24. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl:

$$14-\sqrt{-29}$$

zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 21.

Aufgabe 25. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen: $(1{,}5-2i)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{-6})$ und $(-4-i\sqrt{20})$ zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 37 durchzuführen, wie in Aufgabe 22 gezeigt wurde.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 38. Wie werden zwei komplexe Zahlen durch einander dividiert?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen werden durch einander dividiert, indem man sowohl den Dividendus als auch den Divisor mit dem Konjugierten des letzteren multipliziert.

Erkl. 73. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliziert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 74. Die allgemeine Formel für die Division zweier komplexen Zahlen lautet:

$$\frac{\pm a \pm b i}{\pm \alpha \pm \beta i} = \frac{(\pm a\alpha \pm b\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\pm \alpha b \mp a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Hiernach ist:

$$\frac{a + b i}{\alpha + \beta i} = \frac{(a + b i) \cdot (\alpha - \beta i)}{(\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i)}$$

(nach Erkl. 72)

oder:

$$= \frac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(nach den Antworten auf die Fragen 33 u. 35)

oder, falls der Quotient der beiden Komplexen als eine komplexe Zahl dargestellt werden soll:

$$= \frac{(a\alpha + b\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Frage 39. Was erhält man bei der Division zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{a + b i}{a - b i} = \frac{(a + b i) \cdot (a + b i)}{(a - b i) \cdot (a + b i)}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{a^2 - b^2 + 2 a b i}{a^2 + b^2}$$

(nach den Erkl. 69 und 37)

oder auch:

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2 a b i}{a^2 + b^2}$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Der Quotient zweier konjugierten komplexen Zahlen ist komplex."

Erkl. 74a. Ist $(a + bi)$ der Divisor und $(a - bi)$ der Dividendus, so erhält man:

$$\frac{a - b i}{a + b i} = \frac{(a - b i) \cdot (a - b i)}{(a + b i) \cdot (a - b i)} = \frac{a^2 - b^2 - 2 a b i}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2 a b i}{a^2 + b^2}$$

Frage 40. Wie wird eine komplexe Zahl durch eine

a) reelle,

b) imaginäre

Zahl dividiert?

Antwort. Eine komplexe Zahl wird durch eine (reelle oder imaginäre) Zahl dividiert, indem man sowohl das reelle als auch das imaginäre Glied der Komplexen durch die Zahl dividiert.

Es ist hiernach:

$$\frac{a + b i}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{b i}{\alpha}$$

und

$$\frac{a + b i}{\beta i} = \frac{a}{\beta i} + \frac{b i}{\beta i}$$

oder:

$$= -\frac{a i}{\beta} + \frac{b}{\beta}$$

weil $\frac{1}{i} = -i$ (nach Antwort auf Frage 4a) ist.

Erkl. 75. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man auch aus der Antwort auf Frage 38 wie folgt.

Setzt man in $\frac{a + b i}{\alpha + \beta i}$ für $\alpha = 0$, so erhält man für:

$$\frac{a + b i}{\alpha + \beta i} = \frac{a + b i}{\beta i}$$

und für die in der Antwort auf Frage 38 gegebene Lösung:

$$\frac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(0 + b\beta) + (0 - a\beta) i}{0 + \beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta}{\beta^2} - \frac{a\beta i}{\beta^2}$$

oder:

$$= \frac{b}{\beta} - \frac{a i}{\beta}$$

Setzt man dagegen $\beta = 0$, so gibt:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a+bi}{\alpha}$$

und

$$\frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(a\alpha+0)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+0}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha}{\alpha^2} - \frac{\alpha b i}{\alpha^2}$$

oder:

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{bi}{\alpha}$$

Frage 41. Wie wird eine (reelle oder imaginäre) Zahl durch eine komplexe Zahl dividiert?

Antwort. Eine (reelle oder imaginäre) Zahl wird durch eine komplexe Zahl dividiert, indem man erstere mit dem Konjugierten der gegebenen Komplexen multipliziert und durch die Norm der letzteren dividiert.

Denn es ist:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{a\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} \quad \text{(nach Erkl. 73)}$$

oder:

$$= \frac{a\alpha - a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

ferner:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{bi\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha b i + b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Erkl. 76. Zu dem gleichen Ergebnis wie in nebenstehender Antwort gelangt man auch, wenn man in:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

(siehe Antwort auf Frage 38)

$a = 0$, bezw. $b = 0$ setzt. Ist $a = 0$, so erhält man:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(0+b\beta)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta+\alpha b i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Ist $b = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+0)+(0-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha - a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Frage 42. Was erhält man für das Reciproke einer komplexen Zahl?

Antwort. Es gibt nach dem in voriger Antwort aufgeführten Satz:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

(siehe Erkl. 15)

und

$$\frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

In Worten:

„Das Reciproke einer komplexen Zahl ist gleich dem Konjugierten der letzteren, dividiert durch ihre Norm.“

Frage 43. Was gibt das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=1$$

In Worten:

„Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden, gibt 1."

Frage 44. Was gibt die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen?

Erkl. 77. Auf gleiche Weise, wie in nebenstehender Antwort gezeigt wurde, erhält man auch für den Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{(a\cdot\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(a^2+\beta^2)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

In Worten:

„Der Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten aus ihren Moduln."

Antwort. Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ ist die reelle Zahl:

$$\frac{(a\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

Berechnet man die Quadrate nach den in den Erkl. 69 und 70 aufgeführten Sätzen, so erhält man:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2-2a\alpha b\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+\alpha^2b^2+a^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

d. i.:

$$=\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten ihrer Normen."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 38 erhält man für:

$$\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}=\frac{(-1+7i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}$$

Führt man nach den Antworten auf die Fragen 33 und 35 die Multiplikationen aus, so ergibt sich:

$$= \frac{-1+7i+3i+21}{1^2+3^2}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{20+10i}{10} = 2+i$$

b) $\dfrac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}}$

b) Es gibt:

$$\frac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}} = \frac{(4-6i)\cdot(+1-i)}{(+1+i)\cdot(+1-i)}$$

$$= \frac{4-6i-4i-6}{1^2+1^2} = \frac{-2-10i}{2}$$

d. i.:

$$= -1-5i$$

oder:

$$= -(1+5i)$$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}}$

c) Man erhält für:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{-3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{-3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{-3})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{2+2i\sqrt{6}-3}{2+3}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

d. i.:

$$= \frac{-1+2i\sqrt{6}}{5}$$

oder:

$$= -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

(siehe Erkl. 78)

Erkl. 78. Für:

$$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

erhält man auf 4 Dezimalstellen genau:

$$= -0{,}2000+0{,}9796i$$

d) $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\dfrac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$

d) Der erste Summand gibt:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} = \frac{(a+\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})}{(a-\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

und der zweite Summand:

$$\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{(a-\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})} = \frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 70 und 37)

Folglich erhält man für:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}+\frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

oder, weil beide Brüche denselben Nenner haben:

$$= \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b+a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b} = \frac{2a^2+2b}{a^2+b} = \frac{2\cdot(a^2-b)}{a^2+b}$$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}$

e) Sondert man die imaginäre Einheit ab und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so erhält man für:

$$\frac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}=\frac{(5\cdot 2+10i)\cdot(2\cdot 5\cdot i^3-10i^2)}{10\sqrt{2}}$$

oder, weil $i^3=-i$ ist (siehe Frage 5):

$$=\frac{(10+10i)\cdot(10-10i)}{10\cdot\sqrt{2}}$$

und, wenn man den Zähler nach der Antwort auf Frage 35 ausmultipliziert:

$$=\frac{100+100}{10\cdot\sqrt{2}}\quad\text{oder}\quad=\frac{20}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$=\frac{20\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=10\cdot\sqrt{2}$$

---

f) $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}$

Erkl. 78a. Auf 3 Dezimalstellen genau gibt:

$$+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=+2\cdot 1{,}414\cdot i+\frac{1}{2}\cdot 3{,}162$$
$$=2{,}828i+1{,}581$$

f) Nach der Antwort auf Frage 40 gibt:

$$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}=-\frac{2\sqrt{2}}{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

oder:

$$=+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist (siehe Erkl. 78a).

---

g) $\dfrac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}$

g) Es ist:

$$\frac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{(-2+3\sqrt{-5})\cdot(-2-3\sqrt{-5})}$$

[nach Antwort auf Frage 41, a)]

oder:

$$=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{+4+45}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=-(2+3\sqrt{5})$$

---

h) $\dfrac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}$

h) Man erhält für:

$$\frac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}=\frac{6i}{-4-i}$$

wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht. Nach Antwort auf Frage 41, b) gibt:

$$\frac{6i}{-4-i}=\frac{6i\cdot(-4+i)}{(-4-i)\cdot(-4+i)}=\frac{-24i-6}{16+1}=-1\frac{7}{17}i-\frac{6}{17}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

i) $\dfrac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}$

i) Zunächst gibt:

$$\frac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}=\frac{(12-\sqrt{18}-2i\sqrt{3}-3i\sqrt{6})(2+i\sqrt{6})}{(2-i\sqrt{6})\cdot(2+i\sqrt{6})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder ausmultipliziert:

$$=\frac{24-2\sqrt{18}-4i\sqrt{3}-6i\sqrt{6}+12i\sqrt{6}-i\sqrt{108}+2\sqrt{18}+18}{4+6}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{42-10i\sqrt{3}+6i\sqrt{6}}{10}$$

oder:

$$=4\frac{1}{5}-i\sqrt{3}+\frac{3}{5}i\sqrt{6}=4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\sqrt{2})$$

(siehe Erkl. 78 b)

Erkl. 78 b. Man erhält für:

$$\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\cdot\sqrt{2})=\frac{1}{5}\cdot i\cdot 1{,}732\cdot(5-3\cdot 1{,}414)$$

oder:

$$=0{,}2\cdot 1{,}732\cdot 0{,}758\cdot i=0{,}263\,i$$

Demnach gibt auf 3 Dezimalstellen genau:

$$4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}(5-3\sqrt{2})=4{,}2-0{,}263\,i$$

---

k) $\dfrac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}$

k) Der Dividendus:

$$9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

gibt:

$$=3\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}\cdot 3^2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

wenn man von 9 den Faktor 3 unter die Wurzel bringt (nach Erkl. 32), oder:

$$=3i\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

oder (nach Erkl. 26), weil $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 9) ist:

$$=\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)$$

und der Divisor:

$$2\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\sqrt{-3}$$

wenn man 27 in die Faktoren $3\cdot 9$ und 24 in $4\cdot 6$ zerlegt, um wenigstens teilweise die Wurzeln ziehen zu können:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 3}+\frac{1}{2}i^2\cdot\sqrt{4\cdot 6}-3i\sqrt{3}$$

oder:

$$=6i\sqrt{3}-\sqrt{6}-3i\sqrt{3}=3i\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}(3i-\sqrt{2})$$

Mithin erhält man für:

$$\frac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\cdot(3i-\sqrt{2})}=\frac{3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{3i-\sqrt{2}}$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 38 und 35:

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4}+3i\sqrt{2}\right)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}{(-\sqrt{2}+9i)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{+\frac{1}{4}\sqrt{2}-6i+2\frac{1}{4}i+27\sqrt{2}}{2+81}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{27\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\frac{3}{4}i}{83} = \frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i$$

(siehe Erkl. 78 c)

Erkl. 78 c. Da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, so erhält man für:

$$\frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i = \frac{109\cdot 1{,}414}{332}-\frac{15i}{332}$$
$$= 0{,}464 - 0{,}045i$$

---

l) $\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\sqrt{-5})\right]:\left(14\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right)$

Erkl. 78 d. Man erhält für:

$$3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3^2\cdot\frac{5}{3}} \text{ (nach Erkl. 32)} = \sqrt{15}$$
$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5^2\cdot 3} = 5\cdot\sqrt{3} \text{ (nach Erkl. 9)}$$

l) Löst man nach Erkl. 28 a die runde Klammer auf und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so ergibt sich für:

$$\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{-5})\right]:\left(14\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right) =$$
$$\left[\frac{14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5}}{7-i\sqrt{5}}\right] \text{ (siehe Erkl. 78 d)}$$

und nach Antwort auf Frage 38:

$$= \frac{(14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}{(7-i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{98-7\sqrt{15}-49i\sqrt{3}-14i\sqrt{5}+14i\sqrt{5}-5i\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{15}+10}{49+5}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{108-54i\sqrt{3}}{54} = 3-i\sqrt{3}$$

Aufgabe 27. Was gibt die Norm und der Modulus des Quotienten:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 44 ist die Norm von:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}$$

die reelle Zahl:

$$\frac{5^2+11}{6^2+13} = +\frac{36}{49}$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{5^2+11}{6^2+13}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = +\frac{6}{7}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 28. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\dfrac{2-3i}{-2+5i}$

b) $\dfrac{-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{-3}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{8}-5\cdot\sqrt{-50}}{6\sqrt{27}+14\cdot\sqrt{-1\frac{3}{4}}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}-\dfrac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$

e) $\dfrac{(3\cdot\sqrt[3]{8}-i\sqrt{64})\cdot\left(\frac{138}{23}+8\cdot\sqrt{-1}\right)}{-\sqrt[3]{-1000000}}$

f) $\dfrac{48}{6-2\sqrt{-3}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{-1}}{\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{324}}-4i\cdot\sqrt{-\frac{1}{256}}\right)}$

h) $\dfrac{5-\sqrt{15}+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i}{1+2\sqrt{-1}}$

i) $\dfrac{0{,}5\cdot\sqrt{0{,}04}-0{,}2\cdot\sqrt{-0{,}0625}}{0{,}3\cdot\sqrt{-1{,}21}+0{,}4i\cdot(\sqrt{-1{,}44}-0{,}6)}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, b).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, c). — Die Faktoren 3 und 4 sind ganz bezw. teilweise unter die Wurzelzeichen zu bringen, damit man im Zähler und Nenner gleiche Wurzeln erhält.

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf die Frage 38 durchzuführen. Die Quadratwurzeln sind auf 3 Dezimalstellen genau zu berechnen.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, d).

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, e).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, g).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, h).

h) Man verfahre in gleicher Weise, wie in der Auflösung von Aufgabe 26, i) angegeben wurde.

i) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, k); nur sind hier sämtliche Wurzeln rational.

Aufgabe 29. Was erhält man als Norm und als Modulus des Quotienten:

$$\frac{8+\sqrt{-17}}{6-8i}?$$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 27.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 45. Wie wird eine komplexe Zahl potenziert?

Antwort. Die Potenzierung ist eine wiederholte Multiplikation. Die Erhebung einer komplexen Zahl zu irgend einer Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, hat daher nach den über die Multiplikation komplexer Zahlen

Erkl. 79. Jede beliebige Potenz eines Binoms lässt sich in eine Reihe entwickeln. Diese Reihe, die Formel des binomischen Lehrsatzes genannt, lautet allgemein:

$$(x \pm y)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot y + \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot y^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4} \cdot y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

Für $n = 2$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

(vergl. auch die Erkl. 69 und 70)

Für $n = 3$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln".)

aufgestellten Sätzen zu erfolgen, denn es ist:

$$(a \pm bi)^n = (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdots (n \text{ mal})$$

Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, so erhält man, weil:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right)^n$$

ist (nach Erkl. 24), für:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdots (n \text{ mal})$$

welches Produkt nach den über die Division der komplexen Zahlen aufgestellten Sätzen weiter zu behandeln ist.

Wenn der Exponent eine Zahl > 2 (oder 3) ist, so gelangt man schneller zum Ziel bei Anwendung der Formeln des binomischen Lehrsatzes (siehe nebenstehende Erklärung).

Frage 46. Was erhält man für:

a) $(a \pm bi)^2$

b) $(a \pm bi)^{-2}$?

Antwort. Nach Erkl. 79 gibt:

a) $(a \pm bi)^2 = a^2 + b^2 i^2 \pm 2abi = a^2 - b^2 \pm 2abi$

b) $(a \pm bi)^{-2} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^2} = \dfrac{1}{a^2 - b^2 \pm 2abi}$

(nach Antwort auf Frage 45)

oder:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a^2 - b^2 \mp 2abi)}$$

(nach Antwort auf Frage 42)

d. i.:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 + b^2) \cdot (a^2 + b^2)}$$

Frage 47. Was gibt:

a) $(a \pm bi)^3$

b) $(a \pm bi)^{-3}$?

Erkl. 79a. Da $(a \pm bi)^3 = (a \pm bi)^2 \cdot (a \pm bi)$ ist (nach Erkl. 23), so erhält man auch:

$$(a \pm bi)^3 = (a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a \pm bi)$$
$$= a^3 - ab^2 \pm 2a^2bi \pm a^2bi \mp b^3i + 2ab^2i^2 \quad \text{(nach Erkl. 36)}$$

oder vereinigt:

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i$$

Antwort. Nach Erkl. 79 ist:

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

Setzt man in diese Gleichung für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

a) $(a \pm bi)^3 = a^3 \pm 3a^2bi + 3ab^2i^2 \pm b^3i^3$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Frage 5):

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3) \cdot i$$

b) $(a \pm bi)^{-3} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^3}$

$$= \frac{1}{(a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 48. Was erhält man für $(a \pm bi)^n$, wenn n eine

a) positive, ganze und reelle Zahl,

b) negative, ganze und reelle Zahl

ist?

Antwort. Setzt man in die Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

$$\text{a)}\quad (a \pm bi)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i + \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2 i^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \cdot i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4 i^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, weil $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ ist:

$$= a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) a^{n-3} \cdot b^3 i}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, wenn man den Wert der Potenz in einen reellen und in einen mit i multiplizierten Teil zerlegt:

$$= a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i$$

Hierin gelten alle oberen Zeichen für $(a + bi)^n$, alle unteren für $(a - bi)^n$.

$$\text{b)}\quad (a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n} = 1 : \left\{ a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i \right\}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Ist der Exponent eine gerade oder ungerade, positive oder negative, ganze und reelle Zahl, so erhält man für die Potenz einer komplexen Zahl wiederum eine Komplexe."

Frage 49. Was erhält man für die Summe zweier, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Nach voriger Antwort gibt:

$$(a + bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left(+ n \cdot a^{n-1} \cdot b - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right) \cdot i$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\,a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$
$$+\left(-n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a^{n-3}\cdot b^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\right)\cdot i$$

Folglich gibt:

$$(a+bi)^n + (a-bi)^n = 2\cdot\left[a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\,b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\,a^{n-6}\,b^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right]$$

weil sich die imaginären Teile fortheben

Hieraus folgen die Sätze:

1) „Werden zwei konjugierte komplexe Zahlen auf denselben Grad potenziert, so erhält man wiederum zwei konjugierte Komplexe."

2) „Die Summe von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 50. Was erhält man für die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)^n - (a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$$
$$+\left[n\cdot a^{n-1}\,b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots\right]\cdot i - a^n$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\cdot b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
$$-\left[-n\cdot a^{n-1}\,b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\,b^3 - \cdots\right]\cdot i$$

(nach den Antworten auf die Fragen 48 und 49)

oder vereinigt:

$$= 2i\cdot\left[n\cdot a^{n-1}\cdot b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{n-3}\cdot b^3 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^{n-5}\cdot b^5 - \cdots\right]$$

In Worten:

„Die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist rein imaginär."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Es ist die zweite und die dritte Potenz von:

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

und

$$k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

zu berechnen.

Auflösung. Es gibt:

$$k_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

(nach Antwort auf Frage 46, weil $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist)

oder:

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

ferner:

$$k_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

oder:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

und

$$k_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(+3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right) i$$

(nach Antwort auf Frage 47)

oder:

$$= -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + 0$$

d. i.:

$$= +1$$

endlich:

$$k_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) i$$

d. i.:

$$= +1$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel:

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Aufgabe 31. Nachfolgender Ausdruck ist auf seine einfachste Form zu bringen:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5.$$

Auflösung. Wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht, erhält man für:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5 =$$

$$\left\{2 - 4i + [5i - (18 - 16) + 2] + 7i\right\}^5$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$= \left\{2 - 4i + 5i - 2 + 2 + 7i\right\}^5$$

oder vereinigt:

$$= (2 + 8i)^5$$

Setzt man nun in die Gleichung:

$$(a \pm b\,i)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\,b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\,a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$+ \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3}\,b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$

$$\left. \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot a^{n-5} \cdot b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right] i$$

(siehe Antwort auf Frage 48)

für $a = 2$, $b = 8$ und $n = 5$ ein, so erhält man:

$$(2+8i)^5 = 2^5 - \frac{5\cdot4\cdot2^3\cdot8^2}{1\cdot2} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2^1\cdot8^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$+\left(5\cdot2^4\cdot8 - \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot8^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot8^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)\cdot i$$

oder gekürzt:

$$= 32 - 5120 + 40960 + (640 - 20480 + 32768)\,i$$

oder vereinigt:

$$= +35872 + 12928\,i$$

Aufgabe 32. Es ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 24 ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7}$$

Setzt man in die, in der Antwort auf Frage 48 abgeleitete Formel:

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}b^2}{1\cdot2} \text{ u. s. w.}$$

für $a = 1$, $b = 1$ und $n = 7$ ein, so erhält man:

$$(1-\sqrt{-1})^7 = 1^7 - \frac{7\cdot6\cdot1^5\cdot1^2}{1\cdot2} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1^3\cdot1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot1^1\cdot1^6$$
$$+\left(-7\cdot1^6\cdot1^1 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot1^4\cdot1^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1^2\cdot1^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot1^0\cdot1^7\right)i$$

oder gekürzt:

$$= 1 - 21 + 35 - 7 + (-7 + 35 - 21 + 1)\cdot i$$

oder vereinigt:

$$= 8 + 8i$$

Es gibt also:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7} = \frac{1}{8+8i}$$

oder nach Antwort auf Frage 42:

$$= \frac{(8-8i)}{(8+8i)\cdot(8-8i)} = \frac{8-8i}{8^2+8^2}$$

d. i.:

$$= \frac{1-i}{16} \text{ oder } = \frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

Aufgabe 33. Es sind die ersten vier Potenzen von:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)$$

zu berechnen.

Erkl. 80. Man erhält für:

$$\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

Auflösung. Die erste Potenz ist die Grundzahl selbst, also:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^1 =$$
$$-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$$

Die zweite Potenz gibt, wenn man in die Formel:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

für $a = -\sqrt[3]{a}$ und für $b = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ einsetzt:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^2 = +\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ 2 \cdot (-\sqrt[3]{a}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{+3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot i = \sqrt[3]{a^2} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot i$$

(siehe Erkl. 80)

$$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot i$$

Die dritte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3) \cdot i$$

(siehe Antwort auf Frage 47)

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = -a - 3 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ \left[3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3\right] i$$

oder nach Erkl. 80 a:

$$= -a + \frac{9}{4}a + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3} - \frac{3}{8}a\sqrt{3}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= +\frac{5}{4}a + \frac{9}{8}a\sqrt{3}\,i = \frac{1}{8}a \cdot (10 + 9\sqrt{3}\,i)$$

Erkl. 80 a. Man erhält für:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2} =$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^3} = a\sqrt{3}$$

und für:

$$\left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Die vierte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^4 = a^4 - \frac{4 \cdot 3 \cdot a^2 b^2}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^0 b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \left(+4 \cdot a^3 b - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a^1 b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) i$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)\, i$$

(siehe Antwort auf Frage 48):

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^4 = +\sqrt[3]{a^4} - 6 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{16} \cdot 9 \cdot \sqrt[3]{a^4}$$

$$+ \left(-4 \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} + 4 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}}\right) i$$

oder nach Erkl. 80 b:

$$= a\sqrt[3]{a} - \frac{9}{2}a\sqrt[3]{a} + \frac{9}{16}a\sqrt[3]{a} + \left(-2a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot a\sqrt[3]{a}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= -\frac{47}{16}a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a}\, i$$

oder:

$$= \frac{1}{16}a\sqrt[3]{a} \cdot \left(-47 + \frac{1}{8}\sqrt{3} \cdot i\right)$$

Erkl. 80 b. Es gibt:

$$\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2}$$

$$= a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

und

$$\sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3\sqrt{3a}$$

Aufgabe 34. Was erhält man für:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 48 gibt:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6$$

wenn man in die daselbst abgeleitete Formel für $a=2$, $b=3$ und $n=6$ einsetzt:

$$=2\cdot\left[2^6-\frac{6\cdot5\cdot2^4\cdot3^2}{1\cdot2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot3^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot3^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right]$$

$$=2\cdot[64-2160+4860-729]=2\cdot2035=4070$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 35. Nachstehende Potenzen sind mit Hilfe der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

a) $\left(7+6\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^4$

b) $(1+\sqrt{-1})^7$

c) $\left\{3-\sqrt{-25}+\left[i\cdot\sqrt{9}-(2i^2\cdot\sqrt{36}+\sqrt{144})+9i^2\right]+\sqrt{-81}\right\}^{-3}$

d) $(5-4i)^2+(2-i)^3-(1-5i)^4$

Andeutungen.

a) Auflösung mit Hilfe der in der Auflösung der Aufgabe 33 abgeleiteten Formel: $(a+bi)^4=a^4-6a^2b^2+b^4+(4a^3b-4ab^3)\cdot i$ durchzuführen.

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 32.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 31.

d) Auflösung nach Erkl. 78 und Aufgabe 33 durchzuführen.

Aufgabe 36. Was erhält man für:

$$(3+4i)^2-(3-4i)^2?$$

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 46 durchzuführen.

Aufgabe 37. Es sind die fünf ersten Potenzen von:

$$\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$$

ohne Anwendung der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

Andeutung. Die Berechnung geschieht durch direktes Ausmultiplizieren.

Aufgabe 38. Die in der Antwort auf Frage 47, b) entwickelte Formel:

$$(a\pm bi)^{-3}=\frac{1}{(a^3-3ab^2)+(\pm3a^2b\mp b^3)i}$$

ist nach der Antwort auf Frage 42 weiter zu behandeln.

Andeutung. Auflösung ähnlich wie in der Antwort auf Frage 46, b).

---

e) Ueber die Quadratwurzel.

Anmerkung 7. Ist der Wurzelexponent grösser als 2, so erfolgt die Radizierung einer komplexen Zahl nach dem sogen. Moivreschen Satze, dessen Ableitung und Anwendung im Teil D dieses Werkes gelehrt werden wird. Ist der Wurzelexponent

gleich 3, so könnte man in ähnlicher Weise wie bei der Quadratwurzel auch ohne Benutzung der Moivreschen Formel die Wurzel ermitteln. Da dieses Verfahren aber umständlicher und schwieriger ist, so soll es hier unberücksichtigt bleiben.

Frage 51. Wie wird aus einer komplexen Zahl die Quadratwurzel gezogen?

Antwort. Man erhält für:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Beweis. Setzt man für:

$$\sqrt{a+bi} = x+yi$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = x-yi$$

unter der Voraussetzung, dass x und y (gleich wie a und b) reelle Zahlen bedeuten, so ist:

$$(\sqrt{a+bi})^2 = (x+yi)^2$$

oder:

$$(a+bi) = x^2+2xyi-y^2 \text{ (nach Erkl. 78)}$$

oder:

$$= (x^2-y^2)+2xyi$$

und

$$(\sqrt{a-bi})^2 = (x-yi)^2$$

oder:

$$(a-bi) = x^2-2xyi-y^2 = (x^2-y^2)-2xyi$$

Hieraus folgt, dass:

$$a = x^2-y^2$$

oder:

$$a^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4-2x^2y^2+y^4$$

(nach Erkl. 70)

und

$$b = 2xy$$

oder:

$$b^2 = 4x^2y^2$$

ist. Addiert man a^2 und b^2, so ergibt sich:

$$a^2+b^2 = x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$$

d. i.:

$$= (x^2+y^2)^2$$

Demnach ist:

$$\pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\sqrt{(x^2+y^2)^2} = (x^2+y^2)$$

Nun war nach Voraussetzung:

$$(x^2-y^2) = a$$

folglich ist:

$$a\pm\sqrt{a^2+b^2} = x^2+y^2+(x^2-y^2) = 2x^2$$

oder:

$$x^2 = \frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Ferner ist:

$$-a \pm \sqrt{a^2+b^2} = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2) = 2y^2$$

oder:

$$y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass vor $\sqrt{a^2+b^2}$ im vorliegenden Falle nur das Pluszeichen Gültigkeit haben kann. $\sqrt{a^2+b^2}$ ist [auch bei negativem b, denn $(-b)^2 = +b^2$], stets grösser als a. Würde man diese Wurzel nun negativ nehmen, so würde:

$$\sqrt{\frac{\pm a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

imaginär werden; es würde sich also für die reellen Zahlen x und y Imaginäres ergeben, was keinen Sinn hat.

Demnach hat man für:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

und für:

$$y = +\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

zu setzen und erhält also:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{a-bi} = x - yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Erkl. 81. Ist a negativ, so ergibt sich:

$$\sqrt{-a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{-a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 39. Man soll die folgenden Quadratwurzeln ziehen.

a) $\sqrt{3+4i}$

Auflösungen.

a) Setzt man in die Formel:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a = 3$ und $b = 4$ ein, so erhält man:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}}\right]$$

oder:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right] = \pm[\sqrt{4} + i\cdot\sqrt{1}] = \pm(2+i)$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{-8}}$

b) Wird in die Formel:

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a=1$ und $b=\sqrt{8}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\sqrt{1-i\sqrt{8}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8}}{2}}\right]$$

oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{1+3}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+3}{2}}\right]=\pm(\sqrt{2}-i)$$

c) $\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}$

c) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}=\sqrt{\frac{n(m^2-p\cdot o^2)}{o^2}+\frac{2imn\sqrt{p}}{o}}$$

und wenn man in die Formel in der Antwort auf Frage 51 für $a=\frac{n(m^2-po^2)}{o^2}$ und für $b=\frac{2mn\sqrt{p}}{o}$ einsetzt:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{n\cdot(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-n(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right\}$$ (siehe Erkl. 82)

oder:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]$$ (siehe Erkl. 82 a)

oder gekürzt und soweit als möglich die Wurzeln gezogen:

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

Erkl. 82. Es ist:

$$\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}=\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^4+p^2o^4-2m^2po^2)}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}$$ (nach Erkl. 70)

oder:

$$=\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4-2m^2n^2po^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2po^2}{o^4}}$$ (nach Erkl. 34)

oder vereinigt:

$$\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4+2m^2n^2po^2}{o^4}}$$

d. i.:

$$=\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}=\frac{m^2n+no^2p}{o^2}$$

Erkl. 82 a. Man erhält für:

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{nm^2-no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-nm^2+no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]=\pm\left[\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}}+i\sqrt{np}\right]$$

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

---

d) $\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$

d) Es ist:

$$\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]$$

$$-\left\{\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]\right\}$$

oder, wenn nur das vor den eckigen Klammern stehende Pluszeichen berücksichtigt wird (weil sonst sich vier verschiedene Lösungen ergeben würden):

$$=+\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}-\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}$$

d. i.:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{-16+34}{2}}=2i\sqrt{9}=6i$$

---

e) $\sqrt{6i}$

e) Für $\sqrt{6i}$ kann man $\sqrt{0+6i}$ setzen und erhält alsdann:

$$\sqrt{0+6i}=\pm\left[\sqrt{\frac{0+\sqrt{0+36}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-0+\sqrt{0+36}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm(\sqrt{3}+i\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}\cdot(1+i)$$ (vergl. Erkl. 53)

---

f) $\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}$

f) Nach Erkl. 9 ist:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-5+\sqrt{-144}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{-13}}$$

Nun gibt:

$$\sqrt{-5+\sqrt{-144}} \text{ oder } \sqrt{-5+12i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+5+\sqrt{25+144}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+13}{2}}+i\sqrt{\frac{5+13}{2}}\right]=\pm(2+3i)$$

und

$$\sqrt{6-\sqrt{-13}}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+13}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+13}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{6+7}{2}}-i\sqrt{\frac{-6+7}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Berücksichtigt man nur die vor den eckigen Klammern stehenden Pluszeichen, so erhält man für:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=(2+3i)\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

oder:

$$=2\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}+3i\sqrt{\frac{13}{2}}-2i\sqrt{\frac{1}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(2\sqrt{\frac{13}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(3\sqrt{\frac{13}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\left[(2\sqrt{13}+3)+(3\cdot\sqrt{13}-2)i\right]$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=0{,}707\cdot[(2\cdot3{,}606+3)+(3\cdot3{,}606-2)i]=7{,}220+6{,}234i$$

Erkl. 83. Statt wie nebenstehend die Faktoren einzeln zu radizieren, kann man auch aus dem Produkte die Wurzel ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-30+72i+5i\sqrt{13}+12\cdot\sqrt{13}}$$

(nach Antwort auf Frage 33)

$$=\sqrt{(-30+12\sqrt{13})+(72+5\sqrt{13})\cdot i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\sqrt{13})^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{-(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\cdot\sqrt{13})^2}}{2}}\right]$$

(nach Antwort auf Frage 51) oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\cdot\sqrt{13}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\sqrt{13}}}{2}}\right]$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}+i\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+91}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+91}{2}}\right]$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{61+12\sqrt{13}}+i\cdot\sqrt{121-12\sqrt{13}}\right)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\pm0{,}707\cdot(10{,}212+8{,}818i)=7{,}220+6{,}234i$$

g) $\sqrt{\dfrac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$

g) Nach Erkl. 31 ist:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{6+8i}}{\sqrt{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$$

Der Zähler dieses Bruches gibt nach Antwort auf Frage 51:

$$\sqrt{6+8i}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+64}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+64}}{2}}\right]$$
$$=\pm[\sqrt{8}+i\cdot\sqrt{2}]=\pm[2\sqrt{2}+i\sqrt{2}]=\pm\sqrt{2}\cdot(2+i)$$

und der Nenner desselben:

$$\sqrt{16-24i\sqrt{5}}=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}\right]$$
$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{3136}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}\right]=\pm(6-2i\sqrt{5})$$

(siehe Erkl. 84)

Mithin erhält man für:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)}{6-2i\sqrt{5}}$$

wenn man nur die + Zeichen vor den Klammern berücksichtigt; oder (nach Antwort auf Frage 38):

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)\cdot(6+2i\sqrt{5})}{(6-2i\sqrt{5})(6+2i\sqrt{5})}=\frac{12\sqrt{2}+6i\sqrt{2}+4i\sqrt{10}-2\sqrt{10}}{36+20}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{2(6\sqrt{2}-\sqrt{10})+2i(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})}{56}$$

d. i.:

$$=\frac{(6\sqrt{2}-\sqrt{10})}{28}+\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})i}{28}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\frac{(6\cdot1{,}414-3{,}162)}{28}+\frac{(3\cdot1{,}414+2\cdot3{,}162)\cdot i}{28}=0{,}190+0{,}377i)$$

Erkl. 84. Man erhält für:

$$\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}=\sqrt{\frac{-16+56}{2}}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=2\sqrt{5}$$

Erkl. 85. Statt (wie obenstehend) die Wurzel aus Zähler und Nenner für sich zu ziehen, kann man sie auch aus dem Quotienten ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(6+8i)\cdot(16+24i\cdot\sqrt{5})}{(16-24i\sqrt{5})\cdot(16+24i\sqrt{5})}}$$ (nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$=\sqrt{\frac{96+128i+144i\sqrt{5}-192\sqrt{5}}{256+576\cdot5}}$$

oder vereinigt:

$$=\sqrt{\frac{96\cdot(1-2\sqrt{5})+16i(8+9\sqrt{5})}{3136}}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{3136}\cdot[6\cdot(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})]}$$
$$=\frac{1}{14}\cdot\sqrt{6(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= 0{,}071 \cdot \sqrt{-20{,}832 + 28{,}124\,i}$$

oder nach Antwort auf Frage 51:

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}}\right]$$

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + 35}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + 35}{2}}\right]$$

d. i.: $= 0{,}071 \cdot (2{,}661 + 5{,}283) = 0{,}189 + 0{,}375\,i$

(Bem. Die geringe Differenz zwischen diesem und dem obenstehenden Resultate ist eine Folge der Abkürzung sämtlicher Dezimalbrüche auf 3 Stellen.)

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Es sind nachstehende Quadratwurzeln zu ermitteln.

a) $\sqrt{4 + 3\,i}$

b) $\sqrt{-12 - \sqrt{-25}}$

c) $\sqrt{11\,i}$

d) $\sqrt{(-3 + 4\,i) \cdot (-2 + 4\,i\sqrt{6})}$

e) $\sqrt{\dfrac{7 \cdot \sqrt{121} - 24 \cdot \sqrt{-\frac{9}{4}}}{24 + \sqrt{-100}}}$

f) $\sqrt{\dfrac{25\,x^2 r}{z^2} - \dfrac{4\,x^2 y}{r} - \dfrac{20\,x^2 \cdot \sqrt{-y}}{z}}$

g) $\sqrt{2 + \sqrt{-64}} + \sqrt{2 - 8\,i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, b).

c) Man schreibe für $\sqrt{11\,i} = \sqrt{0 + 11\,i}$ und verfahre dann nach der Antwort auf Frage 51.

d) Man ziehe aus jedem Faktor die Wurzel und multipliziere die resultierenden komplexen Zahlen miteinander. (Zum Vergleiche wende man dann das zweite Verfahren an, d. h. man multipliziere erst die beiden Faktoren miteinander und ziehe hierauf aus ihrem Produkt die Wurzel, wie in Erkl. 83 gezeigt wurde.)

e) Man ziehe zunächst die kleinen Quadratwurzeln und hierauf sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel und führe endlich die Division aus. (Zum Vergleiche führe man darauf zuerst die Division aus und ziehe alsdann aus dem Quotienten die Wurzel.) (Vergl. Erkl. 85.)

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, c).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, d). (Es sollen nur die vor den Klammern [Wurzeln] stehenden + Zeichen berücksichtigt werden.)