Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

2) Ueber die komplexen Zahlen im besondern

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 50. Das Wort „konjugiert“ stammt vom lateinischen Worte conjugere und bedeutet „verbunden“ oder „zusammengehörig“.

Erkl. 50a. Die Bezeichnung „konjugierte komplexe Zahlen“ für zwei Komplexe von der Form $a+bi$ und $a-bi$ wurde zuerst von Cauchy (Anal. algébr. c. 7, 1821) gebraucht.

Erkl. 50b. Lejeune Dirichlet (Ueber die Theorie der komplexen Zahlen) nennt „zusammengehörig“ vier komplexe Zahlen:

$$a+bi;\quad -b+ai;\quad -a-bi;\quad b-ai$$

welche so von einander abhängen, dass irgend drei derselben aus der vierten entstehen, wenn man diese mit -1, $\pm i$ multipliziert.

des imaginären Gliedes von einander abweichen.

Hiernach ist das Konjugierte von $a+bi$ die Komplexe $a-bi$ und von $-a+bi$ die komplexe Zahl $-a-bi$ — und umgekehrt.

Frage 22. Wann nennt man zwei komplexe Zahlen associiert?

Erkl. 51. Das Wort „associiert“ (vom französischen Worte associer stammend) bedeutet „zugesellt“ oder „vereinigt“, auch „verbunden“.

Antwort. Zwei komplexe Zahlen heissen associiert, wenn sie gleiche Zahlenwerte, aber entgegengesetzte Zeichen besitzen.

Hiernach sind associierte komplexe Zahlen: $a+bi$ und $-a-bi$.

2) Ueber die komplexen Zahlen im besondern.

Frage 23. Was versteht man unter einer veränderlichen und was unter einer stetig veränderlichen komplexen Zahl?

Erkl. 52. Man unterscheidet unveränderliche oder konstante und veränderliche oder variable Grössen. „Unveränderliche“ oder „Konstante“ sind solche Grössen, die unveränderlich sind oder gedacht werden, „Veränderliche“ oder „Variable“ dagegen solche, die Veränderungen erleiden oder denen solche zugedacht werden können. Eine Zu- oder Abnahme einer Grösse kann nur dann eintreten, wenn diese Grösse selbst eine „Veränderliche“ ist.

Erkl. 52a. Die Wörter „variabel“ und „konstant“ stammen aus dem Lateinischen; ersteres von varius, d. h. „wechselnd“, letzteres von constans, d. h. „beständig“.

Antwort. Man erhält alle zu dem reellen Bestandteile a gehörigen komplexen Zahlen, wenn die Zahl b die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, und überhaupt alle komplexen Zahlen, wenn weiter a der Reihe nach alle zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden (reellen) Werte annimmt. — Verändern sich die beiden reellen Bestandteile a und b der Komplexen $a+bi$ sprungweise, d. h. haben die aufeinanderfolgenden Werte dieser Zahlen irgend welche Differenzen oder verändert sich nur eine von ihnen entweder sprungweise oder stetig (d. h. ununterbrochen, so dass die Differenz zweier aufeinanderfolgender Werte unendlich klein ist), so nennt man die komplexe Zahl eine „veränderliche Komplexe“. — Verändern sich dagegen die beiden reellen Bestandteile stetig, so dass einer unendlich kleinen Zunahme (bezw. Abnahme) von a eine

unendlich kleine Zunahme (bezw. Abnahme) von b entspricht, so nennt man die komplexe Zahl eine „stetig veränderliche Komplexe“.

Frage 24. Was wird aus der komplexen Zahl $a+bi$, wenn einer ihrer reellen Bestandteile oder beide gleichzeitig Null oder unendlich gross werden?

Erkl. 53. Die komplexen Zahlen umfassen alle Zahlen. $a+bi$ geht in die reelle Zahl a über, wenn b zu Null wird, und in die rein imaginäre Zahl bi, wenn a verschwindet. Da sich alle imaginären Zahlen, wie im ersten Teile dieses Werkes nachgewiesen wurde, auf die imaginäre Einheit zurückführen lassen, so ist es möglich, jede imaginäre Zahl mit Hilfe von $\sqrt{-1}$ auf die Form $a+b\cdot\sqrt{-1}$ zu bringen [vergl. Aufgabe 39, e)].

Erkl. 53a. Die allgemeine Form der Zahlen ist die komplexe. Dies ergibt sich ohne weiteres aus der Erkl. 53.

Erkl. 54. Dass $a+bi=0$ ist, wenn sowohl $a=0$ als auch $b=0$ ist, lässt sich auch, wie folgt, beweisen. Die beiden Glieder der Komplexen sind ungleichartig, sie können sich also unmöglich gegenseitig aufheben, und es kann daher nur dann die komplexe Zahl verschwinden, wenn jedes Glied derselben gleichzeitig gleich Null ist.

Antwort. Wird in der komplexen Zahl $a+bi$ der reelle Bestandteil a gleich Null, so erhält man:

$$a+bi=0+bi=bi$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird zu einer rein imaginären, wenn ihr reelles Glied verschwindet.“

Wird dagegen b gleich Null, so ergibt sich:

$$a+bi=a+0\cdot i=a$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl geht in eine reelle über, wenn ihr imaginäres Glied verschwindet.“

Sind beide reellen Bestandteile gleichzeitig gleich Null, so wird aus:

$$a+bi=0+0\cdot i=0$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird zu Null, wenn ihr reelles und ihr imaginäres Glied gleichzeitig gleich Null werden.“ (Siehe Erkl. 5.)

Setzt man $a=\infty$, so erhält man:

$$a+bi=\infty+bi=\infty$$

und für $b=\infty$:

$$a+bi=a+\infty\cdot i=\infty$$

In Worten:

„Eine komplexe Zahl wird unendlich gross, wenn einer ihrer reellen Bestandteile (oder beide gleichzeitig) unendlich gross werden.“

Frage 25. Wann sind zwei komplexe Zahlen einander gleich?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen sind einander gleich, wenn sie sowohl in ihren reellen als auch in ihren imaginären Gliedern vollständig übereinstimmen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Behauptung.

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

wenn $a = \alpha$ und $bi = \beta i$ oder $b = \beta$ ist.

Beweis. Aus $a + bi = \alpha + \beta i$ folgt nach Erkl. 55:

$$a + bi - \alpha - \beta i = 0$$

oder:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0 \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Wäre nun $(b - \beta) \gtrless 0$, so würde $(a - \alpha)$, d. h. die Differenz zweier reellen Zahlen gleich einer imaginären Zahl sein. Da dieses widersinnig ist, so muss $(b - \beta) = 0$, d. h. $b = \beta$ und demnach auch $a = \alpha$ sein.

Erkl. 55. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Man kann Glieder beliebig von der einen Seite der Gleichung auf die andere schaffen (transponieren), wenn man dabei ihre Vorzeichen umkehrt."

3) Ueber das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Anmerkung 6. Da die komplexen Zahlen zweigliedrige Ausdrücke (sogen. Binomien) sind, so werden die für das Rechnen mit mehrgliedrigen Zahlen in der niederen Algebra aufgestellten Gesetze auch auf sie angewendet werden können, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen.

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 26. Wie werden zwei (oder mehrere) komplexe Zahlen addiert?

Antwort. Die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Summe der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Summe der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält für:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = a + \alpha + bi + \beta i = (a + \alpha) + (b + \beta) \cdot i \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Erkl. 56. Die allgemeine Formel für die Summe zweier komplexer Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) + (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta) \cdot i$$

Frage 27. Was gibt die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b) \cdot i = 2a$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 28. Was gibt die Summe zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b) \cdot i = 0$$

In Worten:

„Die Summe zweier associierten komplexen Zahlen ist gleich Null."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg