Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Behauptung.

$$a + bi = \alpha + \beta i$$

wenn $a = \alpha$ und $bi = \beta i$ oder $b = \beta$ ist.

Beweis. Aus $a + bi = \alpha + \beta i$ folgt nach Erkl. 55:

$$a + bi - \alpha - \beta i = 0$$

oder:

$$(a - \alpha) + (b - \beta)i = 0 \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Wäre nun $(b - \beta) \gtrless 0$, so würde $(a - \alpha)$, d. h. die Differenz zweier reellen Zahlen gleich einer imaginären Zahl sein. Da dieses widersinnig ist, so muss $(b - \beta) = 0$, d. h. $b = \beta$ und demnach auch $a = \alpha$ sein.

Erkl. 55. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Man kann Glieder beliebig von der einen Seite der Gleichung auf die andere schaffen (transponieren), wenn man dabei ihre Vorzeichen umkehrt."

3) Ueber das Rechnen mit komplexen Zahlen.

Anmerkung 6. Da die komplexen Zahlen zweigliedrige Ausdrücke (sogen. Binomien) sind, so werden die für das Rechnen mit mehrgliedrigen Zahlen in der niederen Algebra aufgestellten Gesetze auch auf sie angewendet werden können, solange hierdurch keine Widersprüche entstehen.

a) Ueber das Addieren und Subtrahieren.

Frage 26. Wie werden zwei (oder mehrere) komplexe Zahlen addiert?

Antwort. Die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Summe der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Summe der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält für:

$$(a + bi) + (\alpha + \beta i) = a + \alpha + bi + \beta i = (a + \alpha) + (b + \beta) \cdot i \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

Erkl. 56. Die allgemeine Formel für die Summe zweier komplexer Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) + (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \pm \alpha) + (\pm b \pm \beta) \cdot i$$

Frage 27. Was gibt die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b) \cdot i = 2a$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Summe zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 28. Was gibt die Summe zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b) \cdot i = 0$$

In Worten:

„Die Summe zweier associierten komplexen Zahlen ist gleich Null."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 29. Wie werden zwei komplexe Zahlen von einander subtrahiert?

Erkl. 57. Vorstehende Frage lässt sich auch wie folgt beantworten:

„Man subtrahiert zwei komplexe Zahlen von einander, indem man das reelle Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus und das imaginäre Glied des Subtrahendus zu dem des Minuendus mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert."

Erkl. 58. Die allgemeine Formel für die Differenz zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi) - (\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a \mp \alpha) + (\pm b \mp \beta) \cdot i$$

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, deren reelles Glied gleich der Differenz der reellen Glieder und deren imaginäres Glied gleich der Differenz der imaginären Glieder der gegebenen Komplexen ist.

Denn man erhält:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = a + bi - \alpha - \beta i$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= (a - \alpha) + (b - \beta) i$$

(nach Erkl. 26)

Frage 30. Wann ist die Differenz zweier komplexen Zahlen gleich Null?

Antwort. Die Differenz zweier komplexen Zahlen ist gleich Null, wenn das reelle Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus und zugleich das imaginäre Glied des Minuendus gleich dem des Subtrahendus ist.

Behauptung.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = 0$$

wenn $\alpha = a$ und $\beta i = bi$ oder $\beta = b$ ist.

Beweis.

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a - \alpha) + (b - \beta) i$$

(nach Antwort auf Frage 29)

Ist nun $\alpha = a$ und $\beta = b$, so erhält man für:

$$(a + bi) - (\alpha + \beta i) = (a + bi) - (a + bi) = (a - a) + (b - b) i = 0 + 0 i = 0$$

Frage 31. Was gibt die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 59. Ist die Komplexe $(a - bi)$ der Minuendus, so erhält man als Differenz eine negative imaginäre Zahl.

Denn es gibt:

$$(a - bi) - (a + bi) = a - bi - a - bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= -2bi$$

Antwort. Man erhält für:

$$(a + bi) - (a - bi) = a + bi - a + bi$$

(nach Erkl. 28a)

oder:

$$= +2bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Die Differenz zweier konjugierten komplexen Zahlen ist imaginär."

Frage 32. Was erhält man für die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Es gibt:

$$(a + bi) - (-a - bi) = a + bi + a + bi$$

(nach Erkl. 28a

Erkl. 60. Ist die Komplexe $(-a-bi)$ der Minuendus, so erhält man eine negative Differenz.

Denn es gibt:

$$(-a-bi)-(a+bi) = -a-bi-a-bi$$
$$= -2\cdot(a+bi)$$

oder: $= 2a+2bi$

d. i.: $= 2\cdot(a+bi)$

(nach Erkl. 26)

In Worten:

„Die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 18. Nachfolgende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$
$+(i\cdot\sqrt{-81}-i\sqrt{64})$

b) $\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$
$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$
$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$

Auflösungen. (Siehe die Anmerkungen 4 und 6.)

a) Sondert man zunächst die imaginäre Einheit ab und zieht man die Wurzeln, so erhält man für:

$$(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$$
$$+(i\sqrt{-81}-i\sqrt{64}) =$$
$$(6+5i)+(7i-24)+(9i^2-8i)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist [siehe Frage 4, c)]:

$$= (6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$

Nach Antwort auf Frage 26 gibt aber:

$$(6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$
$$= (6-24-9)+(5+7-8)\cdot i$$

oder:

$$= -27+4i$$

---

b) Nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Ausziehen der Wurzeln gibt:

$$\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$$
$$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$$
$$=\left(3\cdot6\cdot a\cdot i+4\cdot\frac{3}{2}\cdot b^2\right)$$
$$+\left(5\cdot b^2\cdot\frac{7}{5}-6\cdot a\cdot 9\cdot i\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\frac{4\cdot b}{a}-8a\cdot 4\cdot i\right)$$

oder:

$$= (18ai+6b^2)+(7b^2-54ai)$$
$$+(28b^2-32ai)$$

Die Summe dieser komplexen Zahlen ist nach Antwort auf Frage 26:

$$= (6b^2+7b^2+28b^2)+(18a-54a-32a)\cdot i$$

oder:

$$= 42b^2-68ai$$

---

c) $(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})$

c) Man erhält für:

$$(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})=(-ai\cdot b^2\cdot i+abi)+(ab^2-abi)$$

oder:

$$=(-ab^2i^2+abi)+(ab^2-abi)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$=(ab^2+abi)+(ab^2-abi)$$

Die Summe dieser konjugierten Komplexen gibt nach Antwort auf Frage 27:

$$=+2ab^2$$

---

d) $(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)$

d) Es ist:

$$(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)=(0{,}6+0{,}8\,i)-(0{,}6-0{,}8\,i)=+1{,}6\,i$$

(nach Antwort auf Frage 31)

---

e) $(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$

e) Es gibt der Minuendus:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})=(-2\cdot10-4\cdot6i)$$

weil $i^2=-1$ ist, oder:

$$=(-20-24i)$$

und der Subtrahendus:

$$\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)=(2i\cdot9i-4\cdot5{,}5\cdot i)$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist [siehe Frage 4, a)], oder:

$$=(-18-22i)$$

Mithin erhält man für:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\cdot\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$$

$$=(-20-24i)-(-18-22i)$$

$$=(-20+18)+(-24+22)\cdot i$$

(nach Erkl. 58)

oder:

$$=-2-2i=-2\cdot(1+i)$$

(nach Erkl. 26)

---

f) $\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$
$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\tfrac{1}{4}}\right)\right]$
$-\left(3\cdot\sqrt{-1\tfrac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\tfrac{9}{16}}\right)$

f) Man erhält nach Absonderung der imaginären Einheit für:

$$\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512}+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\frac{1}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3\cdot\sqrt{-1\frac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\frac{9}{16}}\right)$$
$$=i\cdot\sqrt{49}+\left[(4-i\sqrt{64})-\left(i\cdot\sqrt{100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3i\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-i\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3i\cdot\sqrt{\frac{16}{9}}-5i^2\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}\right)$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ setzt:

$$=7i+[(4-8i)-(10i+2)]-$$
$$\left[(15i+32)+\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right]-\left(4i+\frac{25}{4}\right)$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 26 und 29:

$$=7i+(2-18i)-$$
$$\left(34+13\frac{1}{2}i\right)-\left(6\frac{1}{4}+4i\right)$$

oder:

$$=\left(2-34-6\frac{1}{4}\right)+\left(7-18-13\frac{1}{2}-4\right)i$$

d. i.:

$$=-38\frac{1}{4}-28\frac{1}{2}i$$
$$=-\left(38\frac{1}{4}+28\frac{1}{2}i\right)$$

---

g) $(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169})]+(4+\sqrt{-576})\right\}$
$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$

g) Es gibt nach dem Ausziehen der Wurzeln:

$$(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169}]+(4+\sqrt{-576})\right\}$$
$$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$$
$$=(2+3i)-\left\{(1-12i)+[(2+10i)-(3-13i)]+(4+24i)\right\}$$
$$-\left\{(5-2i)-[(6+6i)-(7-20i)]+(8+14i)\right\}$$

oder nach Auflösung der runden Klammern

$$=2+3i-\left\{1-12i+[2+10i-3+13i]+4+24i\right\}$$
$$-\left\{5-2i-[6+6i-7+20i]+8+14i\right\}$$

oder kürzer:

$$=2+3i-\left\{5+12i+[-1+23i]\right\}-\left\{13+12i-[-1+26i]\right\}$$

sodann nach Auflösung der eckigen Klammern

$$=2+3i-\left\{5+12i-1+23i\right\}-\left\{13+12i+1-26i\right\}$$

und nach Vereinigung der Glieder in den Klammern:

$$= 2 + 3i - \{4 + 35i\} - \{14 - 14i\}$$

endlich nach Auflösung der letzten Klammern:

$$= 2 + 3i - 4 - 35i - 14 + 14i \quad \text{(nach Erkl. 28 a)}$$

d. i.:

$$= -16 - 18i$$

oder:

$$= -2 \cdot (8 + 9i) \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 19. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{121} + \sqrt{-289}) + (\sqrt[3]{729} - 2 \cdot \sqrt{-256}) + (i \cdot \sqrt{-225} - i \cdot \sqrt{324})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, a).

b) $(2 \cdot \sqrt[3]{125} + 3 \cdot \sqrt{-16}) - \left(-\frac{i}{3} \cdot \sqrt{-729} + \sqrt{-121}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, e).

c) $\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{4} a^2 b^4} + 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{27} a^6}\right) + \left(4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} + a \cdot \sqrt{-b^4}\right)$

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 32 durchzuführen.

d) $(0{,}45 + \sqrt{-3{,}61}) - \left(\frac{9}{20} - 1{,}9\,i\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, d).

e) $\sqrt{-\frac{9}{25}} - \left[\left(5 - \sqrt{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\sqrt{-12\frac{1}{4}} + 4 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)\right]$
$- \left[\left(3 \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt{-2\frac{14}{25}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{16}} + 2\right)\right]$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, f).

f) $(3 + \sqrt{-400}) - \{(4 - \sqrt{-256}) + [(5 + \sqrt{-1296}) - (6 - \sqrt{-900})]$
$- [(7 - \sqrt{-625}) + (8 + \sqrt{-441})] - (9 - \sqrt{-529})\}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, g).

g) $\left(-\sqrt[3]{-\frac{343x^3}{y^6 z^9}} + 2x \cdot \sqrt{-144 y^2 z^2}\right) + \left(\frac{7x}{y^2 z^3} + 24 x^3 y^2 i \cdot \sqrt{-\frac{z^2}{x^4 z^2}}\right)$

g) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 27 durchzuführen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg