Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 60. Ist die Komplexe $(-a-bi)$ der Minuendus, so erhält man eine negative Differenz.

Denn es gibt:

$$(-a-bi)-(a+bi) = -a-bi-a-bi$$
$$= -2\cdot(a+bi)$$

oder: $= 2a+2bi$

d. i.: $= 2\cdot(a+bi)$

(nach Erkl. 26)

In Worten:

„Die Differenz zweier associierten komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 18. Nachfolgende Ausdrücke sollen auf ihre einfachste Form gebracht werden:

a) $(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$
$+(i\cdot\sqrt{-81}-i\sqrt{64})$

b) $\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$
$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$
$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$

Auflösungen. (Siehe die Anmerkungen 4 und 6.)

a) Sondert man zunächst die imaginäre Einheit ab und zieht man die Wurzeln, so erhält man für:

$$(\sqrt{36}+\sqrt{-25})+(\sqrt{-49}-2\cdot\sqrt{144})$$
$$+(i\sqrt{-81}-i\sqrt{64}) =$$
$$(6+5i)+(7i-24)+(9i^2-8i)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist [siehe Frage 4, c)]:

$$= (6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$

Nach Antwort auf Frage 26 gibt aber:

$$(6+5i)+(-24+7i)+(-9-8i)$$
$$= (6-24-9)+(5+7-8)\cdot i$$

oder:

$$= -27+4i$$

---

b) Nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Ausziehen der Wurzeln gibt:

$$\left(3\cdot\sqrt{-36a^2}+4\cdot\sqrt[3]{\frac{27b^6}{8}}\right)$$
$$+\left(5b^2\cdot\sqrt{\frac{49}{25}}-6a\cdot\sqrt{-81}\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\sqrt[3]{\frac{64b^3}{a^3}}-8a\cdot\sqrt{-16}\right)$$
$$=\left(3\cdot6\cdot a\cdot i+4\cdot\frac{3}{2}\cdot b^2\right)$$
$$+\left(5\cdot b^2\cdot\frac{7}{5}-6\cdot a\cdot 9\cdot i\right)$$
$$+\left(7ab\cdot\frac{4\cdot b}{a}-8a\cdot 4\cdot i\right)$$

oder:

$$= (18ai+6b^2)+(7b^2-54ai)$$
$$+(28b^2-32ai)$$

Die Summe dieser komplexen Zahlen ist nach Antwort auf Frage 26:

$$= (6b^2+7b^2+28b^2)+(18a-54a-32a)\cdot i$$

oder:

$$= 42b^2-68ai$$

---

c) $(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})$

c) Man erhält für:

$$(-ai\cdot\sqrt{-b^4}+b\cdot\sqrt{-a^2})+(ab^2-a\cdot\sqrt{-b^2})=(-ai\cdot b^2\cdot i+abi)+(ab^2-abi)$$

oder:

$$=(-ab^2i^2+abi)+(ab^2-abi)$$

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$=(ab^2+abi)+(ab^2-abi)$$

Die Summe dieser konjugierten Komplexen gibt nach Antwort auf Frage 27:

$$=+2ab^2$$

---

d) $(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)$

d) Es ist:

$$(0{,}6+0{,}8\,i)-\left(\frac{3}{5}-\sqrt{-0{,}64}\right)=(0{,}6+0{,}8\,i)-(0{,}6-0{,}8\,i)=+1{,}6\,i$$

(nach Antwort auf Frage 31)

---

e) $(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$

e) Es gibt der Minuendus:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})=(-2\cdot10-4\cdot6i)$$

weil $i^2=-1$ ist, oder:

$$=(-20-24i)$$

und der Subtrahendus:

$$\left(2i\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)=(2i\cdot9i-4\cdot5{,}5\cdot i)$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist [siehe Frage 4, a)], oder:

$$=(-18-22i)$$

Mithin erhält man für:

$$(-2\cdot\sqrt[4]{10000}+4i^2\cdot\sqrt{-36})-\left(2i\cdot\sqrt{-81}+\frac{4\cdot\sqrt{30{,}25}}{i}\right)$$

$$=(-20-24i)-(-18-22i)$$

$$=(-20+18)+(-24+22)\cdot i$$

(nach Erkl. 58)

oder:

$$=-2-2i=-2\cdot(1+i)$$

(nach Erkl. 26)

---

f) $\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$
$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\tfrac{1}{4}}\right)\right]$
$-\left(3\cdot\sqrt{-1\tfrac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\tfrac{9}{16}}\right)$

f) Man erhält nach Absonderung der imaginären Einheit für:

$$\sqrt{-49}+\left[(4-\sqrt{-64})-\left(\sqrt{-100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512}+\left(\sqrt[5]{32}-\sqrt{-2\frac{1}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3\cdot\sqrt{-1\frac{7}{9}}-5i\cdot\sqrt{-1\frac{9}{16}}\right)$$
$$=i\cdot\sqrt{49}+\left[(4-i\sqrt{64})-\left(i\cdot\sqrt{100}+5\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\right)\right]$$
$$-\left[(3i\cdot\sqrt{-25}+4\cdot\sqrt[3]{512})+\left(\sqrt[5]{32}-i\cdot\sqrt{\frac{9}{4}}\right)\right]$$
$$-\left(3i\cdot\sqrt{\frac{16}{9}}-5i^2\cdot\sqrt{\frac{25}{16}}\right)$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ setzt:

$$=7i+[(4-8i)-(10i+2)]-$$
$$\left[(15i+32)+\left(2-\frac{3}{2}i\right)\right]-\left(4i+\frac{25}{4}\right)$$

oder nach den Antworten auf die Fragen 26 und 29:

$$=7i+(2-18i)-$$
$$\left(34+13\frac{1}{2}i\right)-\left(6\frac{1}{4}+4i\right)$$

oder:

$$=\left(2-34-6\frac{1}{4}\right)+\left(7-18-13\frac{1}{2}-4\right)i$$

d. i.:

$$=-38\frac{1}{4}-28\frac{1}{2}i$$
$$=-\left(38\frac{1}{4}+28\frac{1}{2}i\right)$$

---

g) $(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169})]+(4+\sqrt{-576})\right\}$
$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$

g) Es gibt nach dem Ausziehen der Wurzeln:

$$(2+\sqrt{-9})-\left\{(1-\sqrt{-144})+[(2+\sqrt{-100})-(3-\sqrt{-169}]+(4+\sqrt{-576})\right\}$$
$$-\left\{(5-\sqrt{-4})-[(6+\sqrt{-36})-(7-\sqrt{-400})]+(8+\sqrt{-196})\right\}$$
$$=(2+3i)-\left\{(1-12i)+[(2+10i)-(3-13i)]+(4+24i)\right\}$$
$$-\left\{(5-2i)-[(6+6i)-(7-20i)]+(8+14i)\right\}$$

oder nach Auflösung der runden Klammern

$$=2+3i-\left\{1-12i+[2+10i-3+13i]+4+24i\right\}$$
$$-\left\{5-2i-[6+6i-7+20i]+8+14i\right\}$$

oder kürzer:

$$=2+3i-\left\{5+12i+[-1+23i]\right\}-\left\{13+12i-[-1+26i]\right\}$$

sodann nach Auflösung der eckigen Klammern

$$=2+3i-\left\{5+12i-1+23i\right\}-\left\{13+12i+1-26i\right\}$$

und nach Vereinigung der Glieder in den Klammern:

$$= 2 + 3i - \{4 + 35i\} - \{14 - 14i\}$$

endlich nach Auflösung der letzten Klammern:

$$= 2 + 3i - 4 - 35i - 14 + 14i \quad \text{(nach Erkl. 28 a)}$$

d. i.:

$$= -16 - 18i$$

oder:

$$= -2 \cdot (8 + 9i) \quad \text{(nach Erkl. 26)}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 19. Es sind die nachstehenden Ausdrücke auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(\sqrt{121} + \sqrt{-289}) + (\sqrt[3]{729} - 2 \cdot \sqrt{-256}) + (i \cdot \sqrt{-225} - i \cdot \sqrt{324})$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, a).

b) $(2 \cdot \sqrt[3]{125} + 3 \cdot \sqrt{-16}) - \left(-\frac{i}{3} \cdot \sqrt{-729} + \sqrt{-121}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, e).

c) $\left(-2 \cdot \sqrt{-\frac{1}{4} a^2 b^4} + 3 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{27} a^6}\right) + \left(4 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^6}{64}} + a \cdot \sqrt{-b^4}\right)$

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 32 durchzuführen.

d) $(0{,}45 + \sqrt{-3{,}61}) - \left(\frac{9}{20} - 1{,}9\,i\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, d).

e) $\sqrt{-\frac{9}{25}} - \left[\left(5 - \sqrt{-\frac{1}{4}}\right) - \left(\sqrt{-12\frac{1}{4}} + 4 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}\right)\right]$
$- \left[\left(3 \cdot \sqrt[4]{81} + \sqrt{-2\frac{14}{25}}\right) - \left(\sqrt{-3\frac{1}{16}} + 2\right)\right]$

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, f).

f) $(3 + \sqrt{-400}) - \{(4 - \sqrt{-256}) + [(5 + \sqrt{-1296}) - (6 - \sqrt{-900})]$
$- [(7 - \sqrt{-625}) + (8 + \sqrt{-441})] - (9 - \sqrt{-529})\}$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 18, g).

g) $\left(-\sqrt[3]{-\frac{343x^3}{y^6 z^9}} + 2x \cdot \sqrt{-144 y^2 z^2}\right) + \left(\frac{7x}{y^2 z^3} + 24 x^3 y^2 i \cdot \sqrt{-\frac{z^2}{x^4 z^2}}\right)$

g) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf Frage 27 durchzuführen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg