Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

b) Ueber das Multiplizieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

b) Ueber das Multiplizieren.

Frage 33. Wie werden zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert?

Erkl. 61. Da sich imaginäre Zahlen mit reellen multiplizieren lassen (vergl. Erkl. 34), so lässt sich das Produkt zweier komplexen Zahlen nach der für das Produkt zweier mehrgliedrigen Grössen aufgestellten Regel entwickeln.

Erkl. 61a. Die allgemeine Formel des Produktes zweier komplexen Zahlen lautet:

$$(\pm a \pm bi)\cdot(\pm \alpha \pm \beta i) = (\pm a\alpha \mp b\beta) + (\pm \alpha b \pm a\beta)\cdot i$$

Erkl. 62. Sollen mehr als zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert werden, so multipliziere man zuerst irgend zwei derselben und die sich hieraus ergebende Komplexe mit der dritten u. s. f.

Antwort. Man erhält (nach Erkl. 36) für:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = a\alpha + bi\alpha + a\beta i + b\beta i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ ist:

$$= (a\alpha - b\beta) + (\alpha b + a\beta)\cdot i$$

Hieraus ergeben sich die Sätze:

1) „Zwei komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man jedes Glied der einen Komplexen mit jedem Gliede der anderen multipliziert und die Produkte addiert."
2) „Das Produkt zweier komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl."

Frage 34. Wie wird eine Komplexe mit irgend einer

a) reellen,
b) imaginären

Zahl multipliziert?

Erkl. 63. Das gleiche Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man, wenn man in dem Produkte $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$ für $\beta = 0$, bezw. für $\alpha = 0$ setzt. Ist $\beta = 0$, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = (a+bi)\cdot\alpha$$
$$= (a\alpha - b\cdot 0) + \alpha b + a\cdot 0)\, i$$

(nach Antwort auf Frage 33)

oder:

$$= a\alpha + \alpha b i$$

Ist $\alpha = 0$, so erhält man:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i) = (a+bi)\cdot\beta i$$
$$= (a\cdot 0 - b\beta) + (0\cdot b + a\beta)\, i$$

oder:

$$= -b\beta + a\beta i$$

Antwort. Eine komplexe Zahl wird mit irgend einer (reellen oder imaginären) Zahl multipliziert, indem man jedes Glied der Komplexen mit der Zahl multipliziert. (Dies folgt aus Erkl. 34.)

Es gibt:

$$(a+bi)\cdot\alpha = a\cdot\alpha + \alpha b i$$

und

$$(a+bi)\cdot\beta i = a\beta i + b\beta i^2 = a\beta i - b\beta$$

Frage 35. Was erhält man für das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Erkl. 64. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man bei Anwendung der Erkl. 37. Hiernach gibt:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$

Antwort. Es ist:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) = (a\cdot a + b\cdot b) + (ab - ab)\, i$$

oder:

$$= a^2 + b^2$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) „Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 65. Die reelle, durch $(a+bi)$ und $(a-bi)$ teilbare, stets positive Zahl (a^2+b^2) wird nach Gauss (Theor. resid. biqu. 30) die „Norm" der Komplexen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ genannt. Die positive Quadratwurzel aus dem Produkte zweier konjugierten komplexen Zahlen wird nach Cauchy (Anal. algèbr.) mit dem Worte „Modulus" oder „Modul" bezeichnet. Der Modul der komplexen Zahlen $(a+bi)$ bezw. $(a-bi)$ ist demnach $\sqrt{a^2+b^2}$. (Vergl. auch Antwort auf Frage 55.)

Erkl. 66. Die Norm ist gleich dem Quadrate des Modulus.

Erkl. 67. Da die Norm von $(a+bi)$ gleich (a^2+b^2) und die von $(a-bi)$ ebenfalls gleich (a^2+b^2) ist (nach Erkl. 65), so ist die Norm des Produktes von $(a+bi)\cdot(a-bi)$ gleich $(a^2+b^2)\cdot(a^2+b^2)=(a^2+b^2)^2$. Allgemein erhält man als Norm des Produktes der beiden Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ die Zahl $(a\cdot\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$ (siehe Antwort auf Frage 33). Denn setzt man hierin für $\alpha=a$ und für $\beta=-b$, so erhält man:

$$(a^2+b^2)^2+(ab-ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

wie vorher für die Norm von $(a+bi)\cdot(a-bi)$.

Erkl. 68. Die Worte „Norm" und „Modulus" stammen aus dem Lateinischen. Ersteres bedeutet „Richtschnur", letzteres „Maass".

(Vergl. auch Teil C.)

Frage 36. Was erhält man für das Produkt zweier associierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)\cdot(-a-bi)=-a^2-abi-abi-b^2i^2$$

oder, da $i^2=-1$ ist:

$$=-a^2-2abi+b^2$$

Frage 37. Was gibt die Norm (der Modulus) des Produktes zweier (oder auch beliebig vieler) komplexen Zahlen?

Erkl. 69. Das Quadrat der Summe zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermehrt um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

Erkl. 70. Das Quadrat der Differenz zweier Zahlen ist gleich der Summe ihrer Quadrate, vermindert um das doppelte Produkt der beiden Zahlen.

In Zeichen:

$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Antwort. Die Norm des Produktes der beiden komplexen Zahlen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$ ist nach Erkl. 67 die reelle Zahl:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2$$

Löst man die Quadrate auf, so ergibt sich:

$$(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2$$
$$-2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2+2a\alpha b\beta$$

(nach den Erkl. 69 und 70)

oder:

$$=(a^2\alpha^2+\alpha^2b^2)+(a^2\beta^2+b^2\beta^2)$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\alpha^2\cdot(a^2+b^2)+\beta^2\cdot(a^2+b^2)$$

d. i.:

$$=(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)$$

2) „Das Produkt zweier konjugierten Zahlen ist gleich ihrer Norm (oder gleich dem Quadrate ihrer Moduln)."

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 71. Das in der Antwort auf Frage 37 entwickelte Gesetz lässt sich auf jedes Produkt von zwei, die Summe zweier Quadrate darstellenden Zahlen anwenden; dieses Produkt wird immer gleich der Summe zweier Quadrate sein; z. B. gibt:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (5\cdot 4-6\cdot 3)^2 + (4\cdot 6+5\cdot 3)^2 = 2^2+39^2$$

denn:

$$2^2+39^2 = 4+1521 = 1525$$

Dasselbe erhält man aber auch auf folgendem, einfacherem Wege. Es ist:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (25+36)\cdot(16+9) = 61\cdot 25 = 1525$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Normen der einzelnen Faktoren."

[Auf gleiche Weise erhält man auch für den Modulus des Produktes der Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$:

$$\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

In Worten:

„Der Modulus des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Moduln der einzelnen Faktoren."]

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 20. Nachstehende Produkte sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27}$

b) $(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$

c) $4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89})$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 34 erhält man für:

$$(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27} = 18i\sqrt{27}-i^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$$

oder, wenn man den Radikandus 27 in zwei Faktoren so zerlegt, dass wenigstens die Wurzel gezogen werden kann, und die Erkl. 9 berücksichtigt:

$$= 18i\cdot\sqrt{9\cdot 3}-i^2\cdot\sqrt{81}$$

d. i.:

$$= 54i\sqrt{3}+9$$

weil $i^2 = -1$ ist.

---

b) Für:

$$(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$$

kann man auch schreiben:

$$(9-12i)\cdot(3+5i)$$

und dieses Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 33:

$$= 9\cdot 3-12i\cdot 3+9\cdot 5i-12i\cdot 5i = (27+60)+(-36+45)i$$

d. i.:

$$= 87+9i$$

---

c) Nach Absonderung der imaginären Einheit erhält man für:

$$4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89}) = 4i\cdot\sqrt{2{,}25}\cdot(3i^2\cdot\sqrt{2{,}56}-2i\cdot\sqrt{2{,}89})$$

und wenn man die Wurzeln zieht und nach der Antwort auf Frage 34 ausmultipliziert:

$$= 4 \cdot 1{,}5 \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot i^3 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot i^2 = 28{,}8\, i^3 - 20{,}4\, i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$= 20{,}4 - 28{,}8\, i$$

d) $(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49})$

d) Es gibt:

$$(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49} = (9 - 6\, i^3) \cdot (3 + 7\, i)$$

oder, weil $i^3 = -i$ ist:

$$= (9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i)$$

Nach der Antwort auf Frage 33 erhält man aber für:

$$(9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i) = (9 \cdot 3 - 6 \cdot 7) + (3 \cdot 6 + 9 \cdot 7)\, i$$

$$= (27 - 42) + (18 + 63)\, i$$

d. i.:

$$= -15 + 81\, i$$

e) $\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right)$

e) Zunächst erhält man nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Wurzelziehen für:

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right) = \left(\frac{2{,}5\, b}{a} + \frac{1{,}4\, i}{a}\right) \cdot \left(\frac{5\, b}{a} - \frac{1{,}4\, i}{a}\right)$$

also zwei konjugierte komplexe Zahlen.

Ihr Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 35:

$$= \left(\frac{2{,}5\, b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1{,}4}{a}\right)^2$$

oder:

$$= \frac{6{,}25\, b^2}{a^2} + \frac{1{,}96}{a^2}$$

oder nach Erkl. 26:

$$= \frac{1}{a^2} \cdot (6{,}25\, b^2 + 1{,}96)$$

f) $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= +\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2$$

oder:

$$= +\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = +1$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$

g) Man erhält nach Erkl. 35 für:

$$\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$$
$$=2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{7}-3i\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$$
$$-4i^2\cdot\sqrt{343}\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}$$
$$+3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{7}+4i^3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{343}$$

oder nach Erkl. 9:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}-3i\cdot\sqrt{7^2}-4i^2\cdot\sqrt{2401}-2i^2\cdot\sqrt{\left(5\frac{1}{7}\right)^2}$$
$$+3i^2\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}+4i^3\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 343}$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ und $i^3=-i$ setzt:

$$=12i-21i+196+10\frac{2}{7}-18-168i$$

oder vereinigt:

$$=188\frac{2}{7}-177i$$

h) $(x-y-zi)\cdot(-x-y+zi)$

h) Wenn man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten multipliziert, so erhält man:

$$(x-y-zi)\cdot(-x)=-x^2+xy+xzi$$

(nach Antwort auf Frage 34)

und wenn man die erste Klammer nur mit dem zweiten Gliede der zweiten multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(-y)=-xy+y^2+yzi$$

und wenn man sie schliesslich nur mit dem letzten Gliede multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(+zi)=xzi-yzi+z^2$$

Folglich gibt:

$$(x-y-zi)\cdot(-x+y+zi)=-x^2+xy+xzi-xy+y^2+yzi+xzi-yzi+z^2$$

oder vereinigt:

$$=x^2+y^2+z^2+2xzi$$

i) $\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$

i) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$=12i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}-36i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}+36i^2\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$$
$$+i\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{48}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{48}+3i\cdot\sqrt{48}$$
$$-2i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+6i\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-6i^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Erkl. 72. Man erhält für:

$\sqrt{1152} = \sqrt{579 \cdot 2} = 24 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

$6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{6}} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{2} = 1{,}414$

$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408$

$\sqrt{3} = 1{,}732$

Erkl. 72a. Genügt ein nur auf 3 Dezimalstellen genaues Resultat, so ist:

$$-2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$-2 \cdot (8 + 12{,}726 + 4{,}896) + 12i(-1 + 2{,}828 + 1{,}732) =$$

$$-51{,}244 + 42{,}720i$$

und wenn man $i^2 = -1$ setzt und nach Erkl. 9 verfährt:

$$= -12 \cdot \sqrt{4} - 36i \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + i \cdot \sqrt{1152} - 3 \cdot \sqrt{72} + 3i\sqrt{48} + 2 \cdot \sqrt{16} + 6i\sqrt{1} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und, falls man soweit als möglich die Wurzeln zieht (siehe Erkl. 72) und für $\sqrt{1} = 1$ setzt:

$$= -24 - 18i - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + 24i\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 12i\sqrt{3} + 8 + 6i + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$$

oder vereinigt:

$$= -16 - 18 \cdot \sqrt{2} - 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - 12i + 24i\sqrt{2} + 12i\sqrt{3}$$

oder:

$$= -2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

(siehe Erkl. 72a)

Aufgabe 21. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl $3 + 4i$ zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 65 ist die Norm von $3 + 4i$ die Zahl:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = +25$$

und der Modulus die Zahl:

$$\sqrt{+25} = +5$$

weil letzterer ebenfalls stets positiv genommen werden muss. (Vergl. Abschnitt C.)

Aufgabe 22. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \text{ und } (3 - 5 \cdot \sqrt{-1})$$

zu ermitteln.

Auflösung. Nach Erkl. 67 ist die Norm von:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \cdot (3 - 5\sqrt{-1})$$

die reelle Zahl:

$$(2 \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5)^2 + (3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 5)^2$$

oder nach der Antwort auf Frage 37:

$$= [2^2 + (2 \cdot \sqrt{3})^2] \cdot [3^2 + (5)^2] = (4 + 12) \cdot (9 + 25) = 16 \cdot 34 = +544$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{+544} = 23{,}32 \cdots$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 23. Man soll die nachfolgenden Produkte auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(0{,}2 + i\sqrt{0{,}01}) \cdot \sqrt{-0{,}09}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, a).

b) $(3-2\sqrt{-1})\cdot\left(2+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{9}}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, b).

c) $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}-i^2\cdot\sqrt{-16}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{324}-2\cdot\sqrt{-4}\right)$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, e).

d) $\left(-\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, f).

e) $\left(\sqrt{-x}+\sqrt{y}-\sqrt{-xy}-\sqrt{-\frac{x}{y}}\right)\cdot\sqrt{-xy}$

e) Auflösung nach der Antwort auf Frage 34 durchzuführen.

f) $(a-b-ci)\cdot(a+b+ci)$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, h).

g) $\left(2\cdot\sqrt{-6}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4i\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{-6}-7\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+10i\right)$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, i).

(Für $\sqrt{+1}$ ist $+1$ zu setzen.)

h) $(1+i)\cdot(-1-i)\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern und darauf die beiden letzten Klammern und schliesslich die aus beiden Produkten sich ergebenden Werte miteinander (nach der Antwort auf Frage 33) und vereinige das Gleichnamige.

Aufgabe 24. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl:

$$14-\sqrt{-29}$$

zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 21.

Aufgabe 25. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen: $(1{,}5-2i)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{-6})$ und $(-4-i\sqrt{20})$ zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 37 durchzuführen, wie in Aufgabe 22 gezeigt wurde.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 38. Wie werden zwei komplexe Zahlen durch einander dividiert?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen werden durch einander dividiert, indem man sowohl den Dividendus als auch den Divisor mit dem Konjugierten des letzteren multipliziert.

Erkl. 73. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliziert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg