Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 71. Das in der Antwort auf Frage 37 entwickelte Gesetz lässt sich auf jedes Produkt von zwei, die Summe zweier Quadrate darstellenden Zahlen anwenden; dieses Produkt wird immer gleich der Summe zweier Quadrate sein; z. B. gibt:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (5\cdot 4-6\cdot 3)^2 + (4\cdot 6+5\cdot 3)^2 = 2^2+39^2$$

denn:

$$2^2+39^2 = 4+1521 = 1525$$

Dasselbe erhält man aber auch auf folgendem, einfacherem Wege. Es ist:

$$(5^2+6^2)\cdot(4^2+3^2) = (25+36)\cdot(16+9) = 61\cdot 25 = 1525$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Normen der einzelnen Faktoren."

[Auf gleiche Weise erhält man auch für den Modulus des Produktes der Komplexen $(a+bi)$ und $(\alpha+\beta i)$:

$$\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

In Worten:

„Der Modulus des Produktes zweier (oder beliebig vieler) komplexen Zahlen ist gleich dem Produkte aus den Moduln der einzelnen Faktoren."]

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 20. Nachstehende Produkte sind auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27}$

b) $(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$

c) $4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89})$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 34 erhält man für:

$$(18-i\sqrt{3})\cdot\sqrt{-27} = 18i\sqrt{27}-i^2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$$

oder, wenn man den Radikandus 27 in zwei Faktoren so zerlegt, dass wenigstens die Wurzel gezogen werden kann, und die Erkl. 9 berücksichtigt:

$$= 18i\cdot\sqrt{9\cdot 3}-i^2\cdot\sqrt{81}$$

d. i.:

$$= 54i\sqrt{3}+9$$

weil $i^2 = -1$ ist.

---

b) Für:

$$(9-\sqrt{-144})\cdot(3+5i)$$

kann man auch schreiben:

$$(9-12i)\cdot(3+5i)$$

und dieses Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 33:

$$= 9\cdot 3-12i\cdot 3+9\cdot 5i-12i\cdot 5i = (27+60)+(-36+45)i$$

d. i.:

$$= 87+9i$$

---

c) Nach Absonderung der imaginären Einheit erhält man für:

$$4\cdot\sqrt{-2{,}25}\cdot(3i\cdot\sqrt{-2{,}56}-2\cdot\sqrt{-2{,}89}) = 4i\cdot\sqrt{2{,}25}\cdot(3i^2\cdot\sqrt{2{,}56}-2i\cdot\sqrt{2{,}89})$$

und wenn man die Wurzeln zieht und nach der Antwort auf Frage 34 ausmultipliziert:

$$= 4 \cdot 1{,}5 \cdot 3 \cdot 1{,}6 \cdot i^3 - 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot 1{,}7 \cdot i^2 = 28{,}8\, i^3 - 20{,}4\, i^2$$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$= 20{,}4 - 28{,}8\, i$$

d) $(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49})$

d) Es gibt:

$$(3 \cdot \sqrt{9} - 6\, i^2 \cdot \sqrt{-1}) \cdot (\sqrt[4]{81} + \sqrt{-49} = (9 - 6\, i^3) \cdot (3 + 7\, i)$$

oder, weil $i^3 = -i$ ist:

$$= (9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i)$$

Nach der Antwort auf Frage 33 erhält man aber für:

$$(9 + 6\, i) \cdot (3 + 7\, i) = (9 \cdot 3 - 6 \cdot 7) + (3 \cdot 6 + 9 \cdot 7)\, i$$

$$= (27 - 42) + (18 + 63)\, i$$

d. i.:

$$= -15 + 81\, i$$

e) $\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right)$

e) Zunächst erhält man nach der Absonderung der imaginären Einheit und nach dem Wurzelziehen für:

$$\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{6{,}25} + \sqrt{-\frac{1{,}96}{a^2}}\right) \cdot \left(5 \cdot \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} - \frac{7}{a} \cdot \sqrt{-0{,}04}\right) = \left(\frac{2{,}5\, b}{a} + \frac{1{,}4\, i}{a}\right) \cdot \left(\frac{5\, b}{a} - \frac{1{,}4\, i}{a}\right)$$

also zwei konjugierte komplexe Zahlen.

Ihr Produkt gibt nach der Antwort auf Frage 35:

$$= \left(\frac{2{,}5\, b}{a}\right)^2 + \left(\frac{1{,}4}{a}\right)^2$$

oder:

$$= \frac{6{,}25\, b^2}{a^2} + \frac{1{,}96}{a^2}$$

oder nach Erkl. 26:

$$= \frac{1}{a^2} \cdot (6{,}25\, b^2 + 1{,}96)$$

f) $\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$

f) Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}\right)$$

$$= +\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-\frac{3}{4}} - \left(\sqrt{-\frac{3}{4}}\right)^2$$

oder:

$$= +\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = +1$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

g) $\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$

g) Man erhält nach Erkl. 35 für:

$$\left(2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}-3\cdot\sqrt{-7}-4i\cdot\sqrt{-343}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-i\sqrt{5\frac{1}{7}}\right)$$
$$=2i\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{7}-3i\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$$
$$-4i^2\cdot\sqrt{343}\cdot\sqrt{7}-2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}$$
$$+3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot i^2\cdot\sqrt{7}+4i^3\cdot\sqrt{5\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{343}$$

oder nach Erkl. 9:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}-3i\cdot\sqrt{7^2}-4i^2\cdot\sqrt{2401}-2i^2\cdot\sqrt{\left(5\frac{1}{7}\right)^2}$$
$$+3i^2\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 7}+4i^3\cdot\sqrt{\frac{36}{7}\cdot 343}$$

oder, wenn man die Wurzeln zieht und für $i^2=-1$ und $i^3=-i$ setzt:

$$=12i-21i+196+10\frac{2}{7}-18-168i$$

oder vereinigt:

$$=188\frac{2}{7}-177i$$

h) $(x-y-zi)\cdot(-x-y+zi)$

h) Wenn man die erste Klammer zunächst nur mit dem ersten Gliede der zweiten multipliziert, so erhält man:

$$(x-y-zi)\cdot(-x)=-x^2+xy+xzi$$

(nach Antwort auf Frage 34)

und wenn man die erste Klammer nur mit dem zweiten Gliede der zweiten multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(-y)=-xy+y^2+yzi$$

und wenn man sie schliesslich nur mit dem letzten Gliede multipliziert:

$$(x-y-zi)\cdot(+zi)=xzi-yzi+z^2$$

Folglich gibt:

$$(x-y-zi)\cdot(-x+y+zi)=-x^2+xy+xzi-xy+y^2+yzi+xzi-yzi+z^2$$

oder vereinigt:

$$=x^2+y^2+z^2+2xzi$$

i) $\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$

i) Nach Erkl. 36 gibt:

$$\left(\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+3i\right)\cdot\left(12\cdot\sqrt{-\frac{1}{6}}+\sqrt{48}-2\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}\right)$$
$$=12i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}-36i\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}+36i^2\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$$
$$+i\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{48}-3\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{48}+3i\cdot\sqrt{48}$$
$$-2i^2\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+6i\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-6i^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Erkl. 72. Man erhält für:

$\sqrt{1152} = \sqrt{579 \cdot 2} = 24 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4 \cdot \sqrt{3}$

$6 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{6}} = 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} = 12 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

$\sqrt{2} = 1{,}414$

$\sqrt{\frac{1}{6}} = 0{,}408$

$\sqrt{3} = 1{,}732$

Erkl. 72a. Genügt ein nur auf 3 Dezimalstellen genaues Resultat, so ist:

$$-2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$-2 \cdot (8 + 12{,}726 + 4{,}896) + 12i(-1 + 2{,}828 + 1{,}732) =$$

$$-51{,}244 + 42{,}720i$$

und wenn man $i^2 = -1$ setzt und nach Erkl. 9 verfährt:

$$= -12 \cdot \sqrt{4} - 36i \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + i \cdot \sqrt{1152} - 3 \cdot \sqrt{72} + 3i\sqrt{48} + 2 \cdot \sqrt{16} + 6i\sqrt{1} + 6\sqrt{\frac{2}{3}}$$

und, falls man soweit als möglich die Wurzeln zieht (siehe Erkl. 72) und für $\sqrt{1} = 1$ setzt:

$$= -24 - 18i - 36 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} + 24i\sqrt{2} - 18\sqrt{2} + 12i\sqrt{3} + 8 + 6i + 12\sqrt{\frac{1}{6}}$$

oder vereinigt:

$$= -16 - 18 \cdot \sqrt{2} - 24 \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} - 12i + 24i\sqrt{2} + 12i\sqrt{3}$$

oder:

$$= -2 \cdot \left(8 + 9\sqrt{2} + 12\sqrt{\frac{1}{6}}\right) + 12i(-1 + 2 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

(siehe Erkl. 72a)

Aufgabe 21. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl $3 + 4i$ zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 65 ist die Norm von $3 + 4i$ die Zahl:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = +25$$

und der Modulus die Zahl:

$$\sqrt{+25} = +5$$

weil letzterer ebenfalls stets positiv genommen werden muss. (Vergl. Abschnitt C.)

Aufgabe 22. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \text{ und } (3 - 5 \cdot \sqrt{-1})$$

zu ermitteln.

Auflösung. Nach Erkl. 67 ist die Norm von:

$$(2 + 2\sqrt{-3}) \cdot (3 - 5\sqrt{-1})$$

die reelle Zahl:

$$(2 \cdot 3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 5)^2 + (3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 5)^2$$

oder nach der Antwort auf Frage 37:

$$= [2^2 + (2 \cdot \sqrt{3})^2] \cdot [3^2 + (5)^2] = (4 + 12) \cdot (9 + 25) = 16 \cdot 34 = +544$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{+544} = 23{,}32 \cdots$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 23. Man soll die nachfolgenden Produkte auf ihre einfachste Form bringen:

a) $(0{,}2 + i\sqrt{0{,}01}) \cdot \sqrt{-0{,}09}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, a).