Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

c) Ueber das Dividieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

b) $(3-2\sqrt{-1})\cdot\left(2+3\cdot\sqrt{-\frac{1}{9}}\right)$

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, b).

c) $\left(\frac{1}{3}\cdot\sqrt{81}-i^2\cdot\sqrt{-16}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\sqrt{324}-2\cdot\sqrt{-4}\right)$

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, e).

d) $\left(-\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{7}{9}}\right)$

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, f).

e) $\left(\sqrt{-x}+\sqrt{y}-\sqrt{-xy}-\sqrt{-\frac{x}{y}}\right)\cdot\sqrt{-xy}$

e) Auflösung nach der Antwort auf Frage 34 durchzuführen.

f) $(a-b-ci)\cdot(a+b+ci)$

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, h).

g) $\left(2\cdot\sqrt{-6}+3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-4i\right)\cdot\left(5\cdot\sqrt{-6}-7\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+10i\right)$

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 20, i).

(Für $\sqrt{+1}$ ist $+1$ zu setzen.)

h) $(1+i)\cdot(-1-i)\cdot\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$

h) Man multipliziere zunächst die beiden ersten Klammern und darauf die beiden letzten Klammern und schliesslich die aus beiden Produkten sich ergebenden Werte miteinander (nach der Antwort auf Frage 33) und vereinige das Gleichnamige.

Aufgabe 24. Es ist die Norm und der Modulus der komplexen Zahl:

$$14-\sqrt{-29}$$

zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 21.

Aufgabe 25. Es ist die Norm und der Modulus des Produktes der komplexen Zahlen: $(1{,}5-2i)$, $(\sqrt{3}+\sqrt{-6})$ und $(-4-i\sqrt{20})$ zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 37 durchzuführen, wie in Aufgabe 22 gezeigt wurde.

---

c) Ueber das Dividieren.

Frage 38. Wie werden zwei komplexe Zahlen durch einander dividiert?

Antwort. Zwei komplexe Zahlen werden durch einander dividiert, indem man sowohl den Dividendus als auch den Divisor mit dem Konjugierten des letzteren multipliziert.

Erkl. 73. Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man den Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multipliziert.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 74. Die allgemeine Formel für die Division zweier komplexen Zahlen lautet:

$$\frac{\pm a \pm b i}{\pm \alpha \pm \beta i} = \frac{(\pm a\alpha \pm b\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\pm \alpha b \mp a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Hiernach ist:

$$\frac{a + b i}{\alpha + \beta i} = \frac{(a + b i) \cdot (\alpha - \beta i)}{(\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i)}$$

(nach Erkl. 72)

oder:

$$= \frac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

(nach den Antworten auf die Fragen 33 u. 35)

oder, falls der Quotient der beiden Komplexen als eine komplexe Zahl dargestellt werden soll:

$$= \frac{(a\alpha + b\beta)}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{(\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Frage 39. Was erhält man bei der Division zweier konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{a + b i}{a - b i} = \frac{(a + b i) \cdot (a + b i)}{(a - b i) \cdot (a + b i)}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{a^2 - b^2 + 2 a b i}{a^2 + b^2}$$

(nach den Erkl. 69 und 37)

oder auch:

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2 a b i}{a^2 + b^2}$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Der Quotient zweier konjugierten komplexen Zahlen ist komplex."

Erkl. 74a. Ist $(a + b i)$ der Divisor und $(a - b i)$ der Dividendus, so erhält man:

$$\frac{a - b i}{a + b i} = \frac{(a - b i) \cdot (a - b i)}{(a + b i) \cdot (a - b i)} = \frac{a^2 - b^2 - 2 a b i}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - \frac{2 a b i}{a^2 + b^2}$$

Frage 40. Wie wird eine komplexe Zahl durch eine

a) reelle,

b) imaginäre

Zahl dividiert?

Antwort. Eine komplexe Zahl wird durch eine (reelle oder imaginäre) Zahl dividiert, indem man sowohl das reelle als auch das imaginäre Glied der Komplexen durch die Zahl dividiert.

Es ist hiernach:

$$\frac{a + b i}{\alpha} = \frac{a}{\alpha} + \frac{b i}{\alpha}$$

und

$$\frac{a + b i}{\beta i} = \frac{a}{\beta i} + \frac{b i}{\beta i}$$

oder:

$$= -\frac{a i}{\beta} + \frac{b}{\beta}$$

weil $\frac{1}{i} = -i$ (nach Antwort auf Frage 4a) ist.

Erkl. 75. Dasselbe Resultat wie in nebenstehender Antwort erhält man auch aus der Antwort auf Frage 38 wie folgt.

Setzt man in $\frac{a + b i}{\alpha + \beta i}$ für $\alpha = 0$, so erhält man für:

$$\frac{a + b i}{\alpha + \beta i} = \frac{a + b i}{\beta i}$$

und für die in der Antwort auf Frage 38 gegebene Lösung:

$$\frac{(a\alpha + b\beta) + (\alpha b - a\beta) i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(0 + b\beta) + (0 - a\beta) i}{0 + \beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta}{\beta^2} - \frac{a\beta i}{\beta^2}$$

oder:

$$= \frac{b}{\beta} - \frac{a i}{\beta}$$

Setzt man dagegen $\beta = 0$, so gibt:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a+bi}{\alpha}$$

und

$$\frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(a\alpha+0)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+0}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha}{\alpha^2} - \frac{\alpha b i}{\alpha^2}$$

oder:

$$= \frac{a}{\alpha} + \frac{bi}{\alpha}$$

Frage 41. Wie wird eine (reelle oder imaginäre) Zahl durch eine komplexe Zahl dividiert?

Erkl. 76. Zu dem gleichen Ergebnis wie in nebenstehender Antwort gelangt man auch, wenn man in:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+b\beta)+(\alpha b-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

(siehe Antwort auf Frage 38)

$a = 0$, bezw. $b = 0$ setzt. Ist $a = 0$, so erhält man:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{(0+b\beta)+(\alpha b-0)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{b\beta+\alpha b i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Ist $b = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{(a\alpha+0)+(0-a\beta)i}{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$= \frac{a\alpha-a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

Antwort. Eine (reelle oder imaginäre) Zahl wird durch eine komplexe Zahl dividiert, indem man erstere mit dem Konjugierten der gegebenen Komplexen multipliziert und durch die Norm der letzteren dividiert.

Denn es ist:

$$\frac{a}{\alpha+\beta i} = \frac{a\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} \text{ (nach Erkl. 73)}$$

oder:

$$= \frac{a\alpha-a\beta i}{\alpha^2+\beta^2}$$

ferner:

$$\frac{bi}{\alpha+\beta i} = \frac{bi\cdot(\alpha-\beta i)}{(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)} = \frac{\alpha b i+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Frage 42. Was erhält man für das Reciproke einer komplexen Zahl?

Antwort. Es gibt nach dem in voriger Antwort aufgeführten Satz:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

(siehe Erkl. 15)

und

$$\frac{1}{a-bi} = \frac{a+bi}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a+bi}{a^2+b^2}$$

In Worten:

„Das Reciproke einer komplexen Zahl ist gleich dem Konjugierten der letzteren, dividiert durch ihre Norm.“

Frage 43. Was gibt das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=1$$

In Worten:

„Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden, gibt 1.“

Frage 44. Was gibt die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen?

Erkl. 77. Auf gleiche Weise, wie in nebenstehender Antwort gezeigt wurde, erhält man auch für den Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{(a\cdot\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(a^2+\beta^2)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

In Worten:

„Der Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten aus ihren Moduln.“

Antwort. Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ ist die reelle Zahl:

$$\frac{(a\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

Berechnet man die Quadrate nach den in den Erkl. 69 und 70 aufgeführten Sätzen, so erhält man:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2-2a\alpha b\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+\alpha^2b^2+a^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

d. i.:

$$=\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten ihrer Normen.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 38 erhält man für:

$$\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}=\frac{(-1+7i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}$$

Führt man nach den Antworten auf die Fragen 33 und 35 die Multiplikationen aus, so ergibt sich:

$$= \frac{-1+7i+3i+21}{1^2+3^2}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{20+10i}{10} = 2+i$$

b) $\dfrac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}}$

b) Es gibt:

$$\frac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}} = \frac{(4-6i)\cdot(+1-i)}{(+1+i)\cdot(+1-i)}$$

$$= \frac{4-6i-4i-6}{1^2+1^2} = \frac{-2-10i}{2}$$

d. i.:

$$= -1-5i$$

oder:

$$= -(1+5i)$$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}}$

c) Man erhält für:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{-3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{-3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{-3})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{2+2i\sqrt{6}-3}{2+3}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

d. i.:

$$= \frac{-1+2i\sqrt{6}}{5}$$

oder:

$$= -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

(siehe Erkl. 78)

Erkl. 78. Für:

$$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

erhält man auf 4 Dezimalstellen genau:

$$= -0{,}2000+0{,}9796i$$

d) $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\dfrac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$

d) Der erste Summand gibt:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} = \frac{(a+\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})}{(a-\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

und der zweite Summand:

$$\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{(a-\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})} = \frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 70 und 37)

Folglich erhält man für:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}+\frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

oder, weil beide Brüche denselben Nenner haben:

$$= \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b+a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b} = \frac{2a^2+2b}{a^2+b} = \frac{2\cdot(a^2-b)}{a^2+b}$$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}$

e) Sondert man die imaginäre Einheit ab und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so erhält man für:

$$\frac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}=\frac{(5\cdot 2+10i)\cdot(2\cdot 5\cdot i^3-10i^2)}{10\sqrt{2}}$$

oder, weil $i^3=-i$ ist (siehe Frage 5):

$$=\frac{(10+10i)\cdot(10-10i)}{10\cdot\sqrt{2}}$$

und, wenn man den Zähler nach der Antwort auf Frage 35 ausmultipliziert:

$$=\frac{100+100}{10\cdot\sqrt{2}}\quad\text{oder}\quad=\frac{20}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$=\frac{20\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=10\cdot\sqrt{2}$$

---

f) $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}$

Erkl. 78a. Auf 3 Dezimalstellen genau gibt:

$$+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=+2\cdot 1{,}414\cdot i+\frac{1}{2}\cdot 3{,}162$$
$$=2{,}828i+1{,}581$$

f) Nach der Antwort auf Frage 40 gibt:

$$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}=-\frac{2\sqrt{2}}{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

oder:

$$=+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist (siehe Erkl. 78a).

---

g) $\dfrac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}$

g) Es ist:

$$\frac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{(-2+3\sqrt{-5})\cdot(-2-3\sqrt{-5})}$$

[nach Antwort auf Frage 41, a)]

oder:

$$=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{+4+45}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=-(2+3\sqrt{5})$$

---

h) $\dfrac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}$

h) Man erhält für:

$$\frac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}=\frac{6i}{-4-i}$$

wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht. Nach Antwort auf Frage 41, b) gibt:

$$\frac{6i}{-4-i}=\frac{6i\cdot(-4+i)}{(-4-i)\cdot(-4+i)}=\frac{-24i-6}{16+1}=-1\frac{7}{17}i-\frac{6}{17}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

i) $\dfrac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}$

i) Zunächst gibt:

$$\frac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}=\frac{(12-\sqrt{18}-2i\sqrt{3}-3i\sqrt{6})(2+i\sqrt{6})}{(2-i\sqrt{6})\cdot(2+i\sqrt{6})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder ausmultipliziert:

$$=\frac{24-2\sqrt{18}-4i\sqrt{3}-6i\sqrt{6}+12i\sqrt{6}-i\sqrt{108}+2\sqrt{18}+18}{4+6}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{42-10i\sqrt{3}+6i\sqrt{6}}{10}$$

oder:

$$=4\frac{1}{5}-i\sqrt{3}+\frac{3}{5}i\sqrt{6}=4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\sqrt{2})$$

(siehe Erkl. 78 b)

Erkl. 78 b. Man erhält für:

$$\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\cdot\sqrt{2})=\frac{1}{5}\cdot i\cdot 1{,}732\cdot(5-3\cdot 1{,}414)$$

oder:

$$=0{,}2\cdot 1{,}732\cdot 0{,}758\cdot i=0{,}263\,i$$

Demnach gibt auf 3 Dezimalstellen genau:

$$4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}(5-3\sqrt{2})=4{,}2-0{,}263\,i$$

---

k) $\dfrac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}$

k) Der Dividendus:

$$9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

gibt:

$$=3\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}\cdot 3^2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

wenn man von 9 den Faktor 3 unter die Wurzel bringt (nach Erkl. 32), oder:

$$=3i\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

oder (nach Erkl. 26), weil $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 9) ist:

$$=\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)$$

und der Divisor:

$$2\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\sqrt{-3}$$

wenn man 27 in die Faktoren $3\cdot 9$ und 24 in $4\cdot 6$ zerlegt, um wenigstens teilweise die Wurzeln ziehen zu können:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 3}+\frac{1}{2}i^2\cdot\sqrt{4\cdot 6}-3i\sqrt{3}$$

oder:

$$=6i\sqrt{3}-\sqrt{6}-3i\sqrt{3}=3i\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}(3i-\sqrt{2})$$

Mithin erhält man für:

$$\frac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\cdot(3i-\sqrt{2})}=\frac{3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{3i-\sqrt{2}}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder nach den Antworten auf die Fragen 38 und 35:

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4}+3i\sqrt{2}\right)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}{(-\sqrt{2}+9i)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{+\frac{1}{4}\sqrt{2}-6i+2\frac{1}{4}i+27\sqrt{2}}{2+81}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{27\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\frac{3}{4}i}{83} = \frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i$$

(siehe Erkl. 78 c)

Erkl. 78 c. Da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, so erhält man für:

$$\frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i = \frac{109\cdot 1{,}414}{332}-\frac{15i}{332}$$
$$= 0{,}464-0{,}045i$$

---

l) $\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\sqrt{-5})\right]:\left(14\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right)$

Erkl. 78 d. Man erhält für:

$$3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3^2\cdot\frac{5}{3}} \text{ (nach Erkl. 32)} = \sqrt{15}$$
$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5^2\cdot 3} = 5\cdot\sqrt{3} \text{ (nach Erkl. 9)}$$

l) Löst man nach Erkl. 28 a die runde Klammer auf und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so ergibt sich für:

$$\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{-5})\right]:\left(14\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right) =$$
$$\left[\frac{14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5}}{7-i\sqrt{5}}\right] \text{ (siehe Erkl. 78 d)}$$

und nach Antwort auf Frage 38:

$$= \frac{(14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}{(7-i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{98-7\sqrt{15}-49i\sqrt{3}-14i\sqrt{5}+14i\sqrt{5}-5i\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{15}+10}{49+5}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{108-54i\sqrt{3}}{54} = 3-i\sqrt{3}$$

Aufgabe 27. Was gibt die Norm und der Modulus des Quotienten:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 44 ist die Norm von:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}$$

die reelle Zahl:

$$\frac{5^2+11}{6^2+13} = +\frac{36}{49}$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{5^2+11}{6^2+13}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = +\frac{6}{7}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 28. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\dfrac{2-3i}{-2+5i}$

b) $\dfrac{-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{-3}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{8}-5\cdot\sqrt{-50}}{6\sqrt{27}+14\cdot\sqrt{-1\frac{3}{4}}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}-\dfrac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$

e) $\dfrac{(3\cdot\sqrt[3]{8}-i\sqrt{64})\cdot\left(\frac{138}{23}+8\cdot\sqrt{-1}\right)}{-\sqrt[3]{-1000000}}$

f) $\dfrac{48}{6-2\sqrt{-3}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{-1}}{\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{324}}-4i\cdot\sqrt{-\frac{1}{256}}\right)}$

h) $\dfrac{5-\sqrt{15}+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i}{1+2\sqrt{-1}}$

i) $\dfrac{0{,}5\cdot\sqrt{0{,}04}-0{,}2\cdot\sqrt{-0{,}0625}}{0{,}3\cdot\sqrt{-1{,}21}+0{,}4i\cdot(\sqrt{-1{,}44}-0{,}6)}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, b).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, c). — Die Faktoren 3 und 4 sind ganz bezw. teilweise unter die Wurzelzeichen zu bringen, damit man im Zähler und Nenner gleiche Wurzeln erhält.

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf die Frage 38 durchzuführen. Die Quadratwurzeln sind auf 3 Dezimalstellen genau zu berechnen.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, d).

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, e).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, g).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, h).

h) Man verfahre in gleicher Weise, wie in der Auflösung von Aufgabe 26, i) angegeben wurde.

i) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, k); nur sind hier sämtliche Wurzeln rational.

Aufgabe 29. Was erhält man als Norm und als Modulus des Quotienten:

$$\frac{8+\sqrt{-17}}{6-8i}?$$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 27.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 45. Wie wird eine komplexe Zahl potenziert?

Antwort. Die Potenzierung ist eine wiederholte Multiplikation. Die Erhebung einer komplexen Zahl zu irgend einer Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, hat daher nach den über die Multiplikation komplexer Zahlen