Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Frage 43. Was gibt das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{(a+bi)\cdot(a-bi)}{a^2+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=1$$

In Worten:

„Das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen, dividiert durch die Norm der einen von beiden, gibt 1.“

Frage 44. Was gibt die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen?

Erkl. 77. Auf gleiche Weise, wie in nebenstehender Antwort gezeigt wurde, erhält man auch für den Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{(a\cdot\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(a^2+\beta^2)^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}}$$

In Worten:

„Der Modulus des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten aus ihren Moduln.“

Antwort. Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen $\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$ ist die reelle Zahl:

$$\frac{(a\alpha+b\beta)^2+(\alpha b-a\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}$$

Berechnet man die Quadrate nach den in den Erkl. 69 und 70 aufgeführten Sätzen, so erhält man:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+2a\alpha b\beta+\alpha^2b^2+a^2\beta^2-2a\alpha b\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+\alpha^2b^2+a^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

oder nach Erkl. 26:

$$=\frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)+b^2\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2)}$$

d. i.:

$$=\frac{a^2+b^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Die Norm des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten ihrer Normen.“

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 26. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}$

Auflösungen.

a) Nach der Antwort auf Frage 38 erhält man für:

$$\frac{(-1+7i)}{(1+3i)}=\frac{(-1+7i)\cdot(1-3i)}{(1+3i)\cdot(1-3i)}$$

Führt man nach den Antworten auf die Fragen 33 und 35 die Multiplikationen aus, so ergibt sich:

$$= \frac{-1+7i+3i+21}{1^2+3^2}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{20+10i}{10} = 2+i$$

b) $\dfrac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}}$

b) Es gibt:

$$\frac{4-6\cdot\sqrt{-1}}{+1+\sqrt{-1}} = \frac{(4-6i)\cdot(+1-i)}{(+1+i)\cdot(+1-i)}$$

$$= \frac{4-6i-4i-6}{1^2+1^2} = \frac{-2-10i}{2}$$

d. i.:

$$= -1-5i$$

oder:

$$= -(1+5i)$$

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}}$

c) Man erhält für:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{-3}}{\sqrt{2}-\sqrt{-3}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{-3})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{-3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{-3})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$= \frac{2+2i\sqrt{6}-3}{2+3}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

d. i.:

$$= \frac{-1+2i\sqrt{6}}{5}$$

oder:

$$= -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

(siehe Erkl. 78)

Erkl. 78. Für:

$$-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\sqrt{6}$$

erhält man auf 4 Dezimalstellen genau:

$$= -0{,}2000+0{,}9796i$$

d) $\dfrac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\dfrac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}}$

d) Der erste Summand gibt:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}} = \frac{(a+\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})}{(a-\sqrt{-b})\cdot(a+\sqrt{-b})} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 69 und Antwort auf Frage 35)

und der zweite Summand:

$$\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{(a-\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})}{(a+\sqrt{-b})\cdot(a-\sqrt{-b})} = \frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

(nach Erkl. 70 und 37)

Folglich erhält man für:

$$\frac{a+\sqrt{-b}}{a-\sqrt{-b}}+\frac{a-\sqrt{-b}}{a+\sqrt{-b}} = \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}+\frac{a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b}$$

oder, weil beide Brüche denselben Nenner haben:

$$= \frac{a^2+2ai\sqrt{b}-b+a^2-2ai\sqrt{b}-b}{a^2+b} = \frac{2a^2+2b}{a^2+b} = \frac{2\cdot(a^2-b)}{a^2+b}$$

e) $\dfrac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}$

e) Sondert man die imaginäre Einheit ab und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so erhält man für:

$$\frac{(5\cdot\sqrt{4}+\sqrt{-100})\cdot(2i^2\cdot\sqrt{-25}-10i\sqrt{-1})}{10\cdot\sqrt{2}}=\frac{(5\cdot 2+10i)\cdot(2\cdot 5\cdot i^3-10i^2)}{10\sqrt{2}}$$

oder, weil $i^3=-i$ ist (siehe Frage 5):

$$=\frac{(10+10i)\cdot(10-10i)}{10\cdot\sqrt{2}}$$

und, wenn man den Zähler nach der Antwort auf Frage 35 ausmultipliziert:

$$=\frac{100+100}{10\cdot\sqrt{2}}\quad\text{oder}\quad=\frac{20}{\sqrt{2}}$$

oder:

$$=\frac{20\cdot\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}=10\cdot\sqrt{2}$$

---

f) $\dfrac{4\cdot\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}$

Erkl. 78a. Auf 3 Dezimalstellen genau gibt:

$$+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}=+2\cdot 1{,}414\cdot i+\frac{1}{2}\cdot 3{,}162$$
$$=2{,}828i+1{,}581$$

f) Nach der Antwort auf Frage 40 gibt:

$$\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{-10}}{(-2i)}=-\frac{2\sqrt{2}}{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

oder:

$$=+2i\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$$

weil $\frac{1}{i}=-i$ ist (siehe Erkl. 78a).

---

g) $\dfrac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}$

g) Es ist:

$$\frac{49}{(-2+3\sqrt{-5})}=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{(-2+3\sqrt{-5})\cdot(-2-3\sqrt{-5})}$$

[nach Antwort auf Frage 41, a)]

oder:

$$=\frac{49\cdot(-2-3\sqrt{-5})}{+4+45}$$

(nach Antwort auf Frage 35)

oder:

$$=-(2+3\sqrt{5})$$

---

h) $\dfrac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}$

h) Man erhält für:

$$\frac{6\cdot\sqrt{-1}}{\left(8i\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}-9\cdot\sqrt{-\frac{1}{81}}\right)}=\frac{6i}{-4-i}$$

wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht. Nach Antwort auf Frage 41, b) gibt:

$$\frac{6i}{-4-i}=\frac{6i\cdot(-4+i)}{(-4-i)\cdot(-4+i)}=\frac{-24i-6}{16+1}=-1\frac{7}{17}i-\frac{6}{17}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

i) $\dfrac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}$

i) Zunächst gibt:

$$\frac{12-\sqrt{18}-(2\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{6})i}{2-i\sqrt{6}}=\frac{(12-\sqrt{18}-2i\sqrt{3}-3i\sqrt{6})(2+i\sqrt{6})}{(2-i\sqrt{6})\cdot(2+i\sqrt{6})}$$

(nach Antwort auf Frage 38)

oder ausmultipliziert:

$$=\frac{24-2\sqrt{18}-4i\sqrt{3}-6i\sqrt{6}+12i\sqrt{6}-i\sqrt{108}+2\sqrt{18}+18}{4+6}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{42-10i\sqrt{3}+6i\sqrt{6}}{10}$$

oder:

$$=4\frac{1}{5}-i\sqrt{3}+\frac{3}{5}i\sqrt{6}=4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\sqrt{2})$$

(siehe Erkl. 78 b)

Erkl. 78 b. Man erhält für:

$$\frac{1}{5}i\sqrt{3}\cdot(5-3\cdot\sqrt{2})=\frac{1}{5}\cdot i\cdot 1{,}732\cdot(5-3\cdot 1{,}414)$$

oder:

$$=0{,}2\cdot 1{,}732\cdot 0{,}758\cdot i=0{,}263\,i$$

Demnach gibt auf 3 Dezimalstellen genau:

$$4\frac{1}{5}-\frac{1}{5}i\sqrt{3}(5-3\sqrt{2})=4{,}2-0{,}263\,i$$

---

k) $\dfrac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}$

k) Der Dividendus:

$$9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

gibt:

$$=3\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}\cdot 3^2}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

wenn man von 9 den Faktor 3 unter die Wurzel bringt (nach Erkl. 32), oder:

$$=3i\sqrt{6}-\frac{1}{4}\sqrt{3}$$

oder (nach Erkl. 26), weil $\sqrt{6}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ (siehe Erkl. 9) ist:

$$=\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)$$

und der Divisor:

$$2\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\sqrt{-3}$$

wenn man 27 in die Faktoren $3\cdot 9$ und 24 in $4\cdot 6$ zerlegt, um wenigstens teilweise die Wurzeln ziehen zu können:

$$=2\cdot i\cdot\sqrt{9\cdot 3}+\frac{1}{2}i^2\cdot\sqrt{4\cdot 6}-3i\sqrt{3}$$

oder:

$$=6i\sqrt{3}-\sqrt{6}-3i\sqrt{3}=3i\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}(3i-\sqrt{2})$$

Mithin erhält man für:

$$\frac{9\cdot\sqrt{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{-27}+\frac{1}{2}i\sqrt{-24}-3\cdot\sqrt{-3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{3}\cdot(3i-\sqrt{2})}=\frac{3i\sqrt{2}-\frac{1}{4}}{3i-\sqrt{2}}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder nach den Antworten auf die Fragen 38 und 35:

$$= \frac{\left(-\frac{1}{4}+3i\sqrt{2}\right)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}{(-\sqrt{2}+9i)\cdot(-\sqrt{2}-9i)}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{+\frac{1}{4}\sqrt{2}-6i+2\frac{1}{4}i+27\sqrt{2}}{2+81}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{27\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\frac{3}{4}i}{83} = \frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i$$

(siehe Erkl. 78 c)

Erkl. 78 c. Da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, so erhält man für:

$$\frac{109}{332}\sqrt{2}-\frac{15}{332}i = \frac{109\cdot 1{,}414}{332}-\frac{15i}{332}$$
$$= 0{,}464-0{,}045i$$

---

l) $\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\sqrt{-5})\right]:\left(14\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right)$

Erkl. 78 d. Man erhält für:

$$3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{3^2\cdot\frac{5}{3}} \text{ (nach Erkl. 32)} = \sqrt{15}$$
$$\sqrt{15}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{5^2\cdot 3} = 5\cdot\sqrt{3} \text{ (nach Erkl. 9)}$$

l) Löst man nach Erkl. 28 a die runde Klammer auf und zieht man soweit als möglich die Wurzeln, so ergibt sich für:

$$\left[2\cdot\sqrt[3]{343}-3\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}-(7i\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{-5})\right]:\left(14\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}-i\sqrt{5}\right) =$$
$$\left[\frac{14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5}}{7-i\sqrt{5}}\right] \text{ (siehe Erkl. 78 d)}$$

und nach Antwort auf Frage 38:

$$= \frac{(14-\sqrt{15}-7i\sqrt{3}-2i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}{(7-i\sqrt{5})\cdot(7+i\sqrt{5})}$$

oder ausmultipliziert:

$$= \frac{98-7\sqrt{15}-49i\sqrt{3}-14i\sqrt{5}+14i\sqrt{5}-5i\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{15}+10}{49+5}$$

oder vereinigt:

$$= \frac{108-54i\sqrt{3}}{54} = 3-i\sqrt{3}$$

Aufgabe 27. Was gibt die Norm und der Modulus des Quotienten:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 44 ist die Norm von:

$$\frac{5-\sqrt{-11}}{6+\sqrt{-13}}$$

die reelle Zahl:

$$\frac{5^2+11}{6^2+13} = +\frac{36}{49}$$

und der Modulus die reelle Zahl:

$$\sqrt{\frac{5^2+11}{6^2+13}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = +\frac{6}{7}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg