Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

d) Ueber das Potenzieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 28. Es sind die nachfolgenden Quotienten auf ihre einfachste Form zu bringen:

a) $\dfrac{2-3i}{-2+5i}$

b) $\dfrac{-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}+4\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}}{2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{-3}}$

c) $\dfrac{4\sqrt{8}-5\cdot\sqrt{-50}}{6\sqrt{27}+14\cdot\sqrt{-1\frac{3}{4}}}$

d) $\dfrac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}-\dfrac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}}$

e) $\dfrac{(3\cdot\sqrt[3]{8}-i\sqrt{64})\cdot\left(\frac{138}{23}+8\cdot\sqrt{-1}\right)}{-\sqrt[3]{-1000000}}$

f) $\dfrac{48}{6-2\sqrt{-3}}$

g) $\dfrac{2\sqrt{-1}}{\left(3\cdot\sqrt{-\frac{1}{324}}-4i\cdot\sqrt{-\frac{1}{256}}\right)}$

h) $\dfrac{5-\sqrt{15}+(3\sqrt{3}-4\sqrt{2})i}{1+2\sqrt{-1}}$

i) $\dfrac{0{,}5\cdot\sqrt{0{,}04}-0{,}2\cdot\sqrt{-0{,}0625}}{0{,}3\cdot\sqrt{-1{,}21}+0{,}4i\cdot(\sqrt{-1{,}44}-0{,}6)}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, b).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, c). — Die Faktoren 3 und 4 sind ganz bezw. teilweise unter die Wurzelzeichen zu bringen, damit man im Zähler und Nenner gleiche Wurzeln erhält.

c) Auflösung mit Hilfe der Antwort auf die Frage 38 durchzuführen. Die Quadratwurzeln sind auf 3 Dezimalstellen genau zu berechnen.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, d).

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, e).

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, g).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, h).

h) Man verfahre in gleicher Weise, wie in der Auflösung von Aufgabe 26, i) angegeben wurde.

i) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 26, k); nur sind hier sämtliche Wurzeln rational.

Aufgabe 29. Was erhält man als Norm und als Modulus des Quotienten:

$$\frac{8+\sqrt{-17}}{6-8i}?$$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 27.

---

d) Ueber das Potenzieren.

Frage 45. Wie wird eine komplexe Zahl potenziert?

Antwort. Die Potenzierung ist eine wiederholte Multiplikation. Die Erhebung einer komplexen Zahl zu irgend einer Potenz, deren Exponent eine positive ganze Zahl ist, hat daher nach den über die Multiplikation komplexer Zahlen

Erkl. 79. Jede beliebige Potenz eines Binoms lässt sich in eine Reihe entwickeln. Diese Reihe, die Formel des binomischen Lehrsatzes genannt, lautet allgemein:

$$(x \pm y)^n = x^n \pm n \cdot x^{n-1} \cdot y + \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \cdot y^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3} \cdot y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot x^{n-4} \cdot y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

Für $n = 2$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

(vergl. auch die Erkl. 69 und 70)

Für $n = 3$ gibt:

$$(x \pm y)^n = (x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

(Siehe Kleyers „Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln".)

aufgestellten Sätzen zu erfolgen, denn es ist:

$$(a \pm bi)^n = (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdot (a \pm bi) \cdots (n \text{ mal})$$

Ist der Exponent eine negative ganze Zahl, so erhält man, weil:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right)^n$$

ist (nach Erkl. 24), für:

$$(a \pm bi)^{-n} = \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdot \left(\frac{1}{a \pm bi}\right) \cdots (n \text{ mal})$$

welches Produkt nach den über die Division der komplexen Zahlen aufgestellten Sätzen weiter zu behandeln ist.

Wenn der Exponent eine Zahl > 2 (oder 3) ist, so gelangt man schneller zum Ziel bei Anwendung der Formeln des binomischen Lehrsatzes (siehe nebenstehende Erklärung).

Frage 46. Was erhält man für:

a) $(a \pm bi)^2$

b) $(a \pm bi)^{-2}$?

Antwort. Nach Erkl. 79 gibt:

a) $(a \pm bi)^2 = a^2 + b^2 i^2 \pm 2abi = a^2 - b^2 \pm 2abi$

b) $(a \pm bi)^{-2} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^2} = \dfrac{1}{a^2 - b^2 \pm 2abi}$

(nach Antwort auf Frage 45)

oder:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a^2 - b^2 \mp 2abi)}$$

(nach Antwort auf Frage 42)

d. i.:

$$= \frac{a^2 - b^2 \mp 2abi}{(a^2 + b^2) \cdot (a^2 + b^2)}$$

Frage 47. Was gibt:

a) $(a \pm bi)^3$

b) $(a \pm bi)^{-3}$?

Erkl. 79a. Da $(a \pm bi)^3 = (a \pm bi)^2 \cdot (a \pm bi)$ ist (nach Erkl. 23), so erhält man auch:

$$(a \pm bi)^3 = (a^2 - b^2 \pm 2abi) \cdot (a \pm bi)$$
$$= a^3 - ab^2 \pm 2a^2bi \pm a^2bi \mp b^3i + 2ab^2i^2 \quad \text{(nach Erkl. 36)}$$

oder vereinigt:

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i$$

Antwort. Nach Erkl. 79 ist:

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$$

Setzt man in diese Gleichung für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

a) $(a \pm bi)^3 = a^3 \pm 3a^2bi + 3ab^2i^2 \pm b^3i^3$

oder, weil $i^2 = -1$ und $i^3 = -i$ ist (siehe Frage 5):

$$= a^3 \pm 3a^2bi - 3ab^2 \mp b^3i$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3) \cdot i$$

b) $(a \pm bi)^{-3} = \dfrac{1}{(a \pm bi)^3}$

$$= \frac{1}{(a^3 - 3ab^2) + (\pm 3a^2b \mp b^3)i}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 48. Was erhält man für $(a \pm bi)^n$, wenn n eine

a) positive, ganze und reelle Zahl,

b) negative, ganze und reelle Zahl

ist?

Antwort. Setzt man in die Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) für $x = a$ und für $y = bi$ ein, so erhält man:

$$\text{a)}\quad (a \pm bi)^n = a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i + \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2 i^2}{1 \cdot 2} \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3 \cdot i^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4 i^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, weil $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ ist:

$$= a^n \pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \cdot i - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) a^{n-3} \cdot b^3 i}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \pm \cdots$$

oder, wenn man den Wert der Potenz in einen reellen und in einen mit i multiplizierten Teil zerlegt:

$$= a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i$$

Hierin gelten alle oberen Zeichen für $(a + bi)^n$, alle unteren für $(a - bi)^n$.

$$\text{b)}\quad (a \pm bi)^{-n} = \frac{1}{(a \pm bi)^n} = 1 : \left\{ a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots\right] \cdot i \right\}$$

Hieraus folgt der Satz:

„Ist der Exponent eine gerade oder ungerade, positive oder negative, ganze und reelle Zahl, so erhält man für die Potenz einer komplexen Zahl wiederum eine Komplexe."

Frage 49. Was erhält man für die Summe zweier, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Nach voriger Antwort gibt:

$$(a + bi)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) a^{n-4} b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots + \left(+ n \cdot a^{n-1} \cdot b - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots\right) \cdot i$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\,a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$
$$+\left(-n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a^{n-3}\cdot b^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\right)\cdot i$$

Folglich gibt:

$$(a+bi)^n + (a-bi)^n = 2\cdot\left[a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\,b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\,a^{n-6}\,b^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right]$$

weil sich die imaginären Teile fortheben

Hieraus folgen die Sätze:

1) „Werden zwei konjugierte komplexe Zahlen auf denselben Grad potenziert, so erhält man wiederum zwei konjugierte Komplexe."

2) „Die Summe von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 50. Was erhält man für die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)^n - (a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$$
$$+\left[n\cdot a^{n-1}\,b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots\right]\cdot i - a^n$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\cdot b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
$$-\left[-n\cdot a^{n-1}\,b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\,b^3 - \cdots\right]\cdot i$$

(nach den Antworten auf die Fragen 48 und 49)

oder vereinigt:

$$= 2i\cdot\left[n\cdot a^{n-1}\cdot b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{n-3}\cdot b^3 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^{n-5}\cdot b^5 - \cdots\right]$$

In Worten:

„Die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist rein imaginär."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Es ist die zweite und die dritte Potenz von:

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

und

$$k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

zu berechnen.

Auflösung. Es gibt:

$$k_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

(nach Antwort auf Frage 46, weil $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist)

oder:

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

ferner:

$$k_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

oder:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

und

$$k_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(+3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right) i$$

(nach Antwort auf Frage 47)

oder:

$$= -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + 0$$

d. i.:

$$= +1$$

endlich:

$$k_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) i$$

d. i.:

$$= +1$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel:

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Aufgabe 31. Nachfolgender Ausdruck ist auf seine einfachste Form zu bringen:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5.$$

Auflösung. Wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht, erhält man für:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5 =$$

$$\left\{2 - 4i + [5i - (18 - 16) + 2] + 7i\right\}^5$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$= \left\{2 - 4i + 5i - 2 + 2 + 7i\right\}^5$$

oder vereinigt:

$$= (2 + 8i)^5$$

Setzt man nun in die Gleichung:

$$(a \pm b\,i)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\,b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\,a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$+ \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3}\,b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$

$$\left. \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot a^{n-5} \cdot b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right] i$$

(siehe Antwort auf Frage 48)

für $a = 2$, $b = 8$ und $n = 5$ ein, so erhält man:

$$(2+8i)^5 = 2^5 - \frac{5\cdot4\cdot2^3\cdot8^2}{1\cdot2} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2^1\cdot8^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$+\left(5\cdot2^4\cdot8 - \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot8^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot8^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)\cdot i$$

oder gekürzt:

$$= 32 - 5120 + 40960 + (640 - 20480 + 32768)\,i$$

oder vereinigt:

$$= +35872 + 12928\,i$$

Aufgabe 32. Es ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 24 ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7}$$

Setzt man in die, in der Antwort auf Frage 48 abgeleitete Formel:

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}b^2}{1\cdot2} \text{ u. s. w.}$$

für $a = 1$, $b = 1$ und $n = 7$ ein, so erhält man:

$$(1-\sqrt{-1})^7 = 1^7 - \frac{7\cdot6\cdot1^5\cdot1^2}{1\cdot2} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1^3\cdot1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot1^1\cdot1^6$$
$$+\left(-7\cdot1^6\cdot1^1 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot1^4\cdot1^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1^2\cdot1^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot1^0\cdot1^7\right)i$$

oder gekürzt:

$$= 1 - 21 + 35 - 7 + (-7 + 35 - 21 + 1)\cdot i$$

oder vereinigt:

$$= 8 + 8i$$

Es gibt also:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7} = \frac{1}{8+8i}$$

oder nach Antwort auf Frage 42:

$$= \frac{(8-8i)}{(8+8i)\cdot(8-8i)} = \frac{8-8i}{8^2+8^2}$$

d. i.:

$$= \frac{1-i}{16} \text{ oder } = \frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

Aufgabe 33. Es sind die ersten vier Potenzen von:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)$$

zu berechnen.

Erkl. 80. Man erhält für:

$$\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

Auflösung. Die erste Potenz ist die Grundzahl selbst, also:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^1 =$$
$$-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$$

Die zweite Potenz gibt, wenn man in die Formel:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

für $a = -\sqrt[3]{a}$ und für $b = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ einsetzt:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^2 = +\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ 2 \cdot (-\sqrt[3]{a}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{+3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot i = \sqrt[3]{a^2} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot i$$

(siehe Erkl. 80)

$$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot i$$

Die dritte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3) \cdot i$$

(siehe Antwort auf Frage 47)

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = -a - 3 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ \left[3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3\right] i$$

oder nach Erkl. 80 a:

$$= -a + \frac{9}{4}a + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3} - \frac{3}{8}a\sqrt{3}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= +\frac{5}{4}a + \frac{9}{8}a\sqrt{3}\,i = \frac{1}{8}a \cdot (10 + 9\sqrt{3}\,i)$$

Erkl. 80 a. Man erhält für:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2} =$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^3} = a\sqrt{3}$$

und für:

$$\left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Die vierte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^4 = a^4 - \frac{4 \cdot 3 \cdot a^2 b^2}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^0 b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \left(+4 \cdot a^3 b - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a^1 b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) i$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)\, i$$

(siehe Antwort auf Frage 48):

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^4 = +\sqrt[3]{a^4} - 6 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{16} \cdot 9 \cdot \sqrt[3]{a^4}$$

$$+ \left(-4 \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} + 4 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}}\right) i$$

oder nach Erkl. 80 b:

$$= a\sqrt[3]{a} - \frac{9}{2}a\sqrt[3]{a} + \frac{9}{16}a\sqrt[3]{a} + \left(-2a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot a\sqrt[3]{a}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= -\frac{47}{16}a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a}\, i$$

oder:

$$= \frac{1}{16}a\sqrt[3]{a} \cdot \left(-47 + \frac{1}{8}\sqrt{3} \cdot i\right)$$

Erkl. 80 b. Es gibt:

$$\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2}$$

$$= a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

und

$$\sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3\sqrt{3a}$$

Aufgabe 34. Was erhält man für:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 48 gibt:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6$$

wenn man in die daselbst abgeleitete Formel für $a=2$, $b=3$ und $n=6$ einsetzt:

$$=2\cdot\left[2^6-\frac{6\cdot5\cdot2^4\cdot3^2}{1\cdot2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot3^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot3^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right]$$

$$=2\cdot[64-2160+4860-729]=2\cdot2035=4070$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 35. Nachstehende Potenzen sind mit Hilfe der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

a) $\left(7+6\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^4$

b) $(1+\sqrt{-1})^7$

c) $\left\{3-\sqrt{-25}+\left[i\cdot\sqrt{9}-(2i^2\cdot\sqrt{36}+\sqrt{144})+9i^2\right]+\sqrt{-81}\right\}^{-3}$

d) $(5-4i)^2+(2-i)^3-(1-5i)^4$

Andeutungen.

a) Auflösung mit Hilfe der in der Auflösung der Aufgabe 33 abgeleiteten Formel: $(a+bi)^4=a^4-6a^2b^2+b^4+(4a^3b-4ab^3)\cdot i$ durchzuführen.

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 32.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 31.

d) Auflösung nach Erkl. 78 und Aufgabe 33 durchzuführen.

Aufgabe 36. Was erhält man für:

$$(3+4i)^2-(3-4i)^2?$$

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 46 durchzuführen.

Aufgabe 37. Es sind die fünf ersten Potenzen von:

$$\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$$

ohne Anwendung der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

Andeutung. Die Berechnung geschieht durch direktes Ausmultiplizieren.

Aufgabe 38. Die in der Antwort auf Frage 47, b) entwickelte Formel:

$$(a\pm bi)^{-3}=\frac{1}{(a^3-3ab^2)+(\pm3a^2b\mp b^3)i}$$

ist nach der Antwort auf Frage 42 weiter zu behandeln.

Andeutung. Auflösung ähnlich wie in der Antwort auf Frage 46, b).

---

e) Ueber die Quadratwurzel.

Anmerkung 7. Ist der Wurzelexponent grösser als 2, so erfolgt die Radizierung einer komplexen Zahl nach dem sogen. Moivreschen Satze, dessen Ableitung und Anwendung im Teil D dieses Werkes gelehrt werden wird. Ist der Wurzelexponent