Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

und

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\,a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \cdots$$
$$+\left(-n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot a^{n-3}\cdot b^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots\right)\cdot i$$

Folglich gibt:

$$(a+bi)^n + (a-bi)^n = 2\cdot\left[a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\,b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\,b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$
$$\left. - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\,a^{n-6}\,b^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right]$$

weil sich die imaginären Teile fortheben

Hieraus folgen die Sätze:

1) „Werden zwei konjugierte komplexe Zahlen auf denselben Grad potenziert, so erhält man wiederum zwei konjugierte Komplexe."

2) „Die Summe von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist reell."

Frage 50. Was erhält man für die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen?

Antwort. Man erhält für:

$$(a+bi)^n - (a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot a^{n-4}\cdot b^4 - \cdots$$
$$+\left[n\cdot a^{n-1}\,b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots\right]\cdot i - a^n$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}\cdot b^2}{1\cdot 2} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot a^{n-4}\cdot b^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$
$$-\left[-n\cdot a^{n-1}\,b + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\,b^3 - \cdots\right]\cdot i$$

(nach den Antworten auf die Fragen 48 und 49)

oder vereinigt:

$$= 2i\cdot\left[n\cdot a^{n-1}\cdot b - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,a^{n-3}\cdot b^3 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^{n-5}\cdot b^5 - \cdots\right]$$

In Worten:

„Die Differenz von zwei, auf denselben Grad potenzierten, konjugierten komplexen Zahlen ist rein imaginär."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 30. Es ist die zweite und die dritte Potenz von:

$$k_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

und

$$k_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

zu berechnen.

Auflösung. Es gibt:

$$k_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

(nach Antwort auf Frage 46, weil $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist)

oder:

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

ferner:

$$k_2^2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2 = +\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

oder:

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

d. i.:

$$= k_2$$

und

$$k_1^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 + \left(+3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right) i$$

(nach Antwort auf Frage 47)

oder:

$$= -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + 0$$

d. i.:

$$= +1$$

endlich:

$$k_2^3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3}\right)^3 = -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} + \left(-\frac{3}{8}\sqrt{3} + \frac{3}{8}\sqrt{3}\right) i$$

d. i.:

$$= +1$$

Hieraus ergibt sich folgende Formel:

$$\sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

Aufgabe 31. Nachfolgender Ausdruck ist auf seine einfachste Form zu bringen:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5.$$

Auflösung. Wenn man die imaginäre Einheit absondert und die Wurzeln zieht, erhält man für:

$$\left\{2 - \sqrt{-16} + \left[i \cdot \sqrt{25} - \left(6 \cdot \sqrt{9} - \sqrt{256}\right) - 2\,i^2\right] + \sqrt{-49}\right\}^5 =$$

$$\left\{2 - 4i + [5i - (18 - 16) + 2] + 7i\right\}^5$$

und nach Auflösung der Klammern:

$$= \left\{2 - 4i + 5i - 2 + 2 + 7i\right\}^5$$

oder vereinigt:

$$= (2 + 8i)^5$$

Setzt man nun in die Gleichung:

$$(a \pm b\,i)^n = a^n - \frac{n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2}\, b^2}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\, a^{n-4} \cdot b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

$$+ \left[\pm n \cdot a^{n-1} \cdot b \mp \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3}\, b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$

$$\left. \pm \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot a^{n-5} \cdot b^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots\right] i$$

(siehe Antwort auf Frage 48)

für $a = 2$, $b = 8$ und $n = 5$ ein, so erhält man:

$$(2+8i)^5 = 2^5 - \frac{5\cdot4\cdot2^3\cdot8^2}{1\cdot2} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2^1\cdot8^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$
$$+\left(5\cdot2^4\cdot8 - \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot8^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot8^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\right)\cdot i$$

oder gekürzt:

$$= 32 - 5120 + 40960 + (640 - 20480 + 32768)\,i$$

oder vereinigt:

$$= +35872 + 12928\,i$$

Aufgabe 32. Es ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach Erkl. 24 ist:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7}$$

Setzt man in die, in der Antwort auf Frage 48 abgeleitete Formel:

$$(a-bi)^n = a^n - \frac{n\cdot(n-1)\cdot a^{n-2}b^2}{1\cdot2} \text{ u. s. w.}$$

für $a = 1$, $b = 1$ und $n = 7$ ein, so erhält man:

$$(1-\sqrt{-1})^7 = 1^7 - \frac{7\cdot6\cdot1^5\cdot1^2}{1\cdot2} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1^3\cdot1^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot1^1\cdot1^6$$
$$+\left(-7\cdot1^6\cdot1^1 + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot1^4\cdot1^3}{1\cdot2\cdot3} - \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot1^2\cdot1^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot1^0\cdot1^7\right)i$$

oder gekürzt:

$$= 1 - 21 + 35 - 7 + (-7 + 35 - 21 + 1)\cdot i$$

oder vereinigt:

$$= 8 + 8i$$

Es gibt also:

$$(1-\sqrt{-1})^{-7} = \frac{1}{(1-\sqrt{-1})^7} = \frac{1}{8+8i}$$

oder nach Antwort auf Frage 42:

$$= \frac{(8-8i)}{(8+8i)\cdot(8-8i)} = \frac{8-8i}{8^2+8^2}$$

d. i.:

$$= \frac{1-i}{16} \text{ oder } = \frac{1}{16} - \frac{i}{16}$$

Aufgabe 33. Es sind die ersten vier Potenzen von:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)$$

zu berechnen.

Erkl. 80. Man erhält für:

$$\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{a^2}$$
$$= \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

Auflösung. Die erste Potenz ist die Grundzahl selbst, also:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}\right)^1 =$$
$$-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{-3\cdot\sqrt[3]{a^2}}$$

Die zweite Potenz gibt, wenn man in die Formel:

$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

für $a = -\sqrt[3]{a}$ und für $b = \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$ einsetzt:

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^2 = +\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ 2 \cdot (-\sqrt[3]{a}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{+3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot i = \sqrt[3]{a^2} - \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot i$$

(siehe Erkl. 80)

$$= \frac{1}{4}\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot i$$

Die dritte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3) \cdot i$$

(siehe Antwort auf Frage 47)

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = -a - 3 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2}$$

$$+ \left[3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} - \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3\right] i$$

oder nach Erkl. 80 a:

$$= -a + \frac{9}{4}a + \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3} - \frac{3}{8}a\sqrt{3}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= +\frac{5}{4}a + \frac{9}{8}a\sqrt{3}\,i = \frac{1}{8}a \cdot (10 + 9\sqrt{3}\,i)$$

Erkl. 80 a. Man erhält für:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2} =$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a^3} = a\sqrt{3}$$

und für:

$$\left(\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^3 = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot a$$

Die vierte Potenz gibt nach der Formel:

$$(a + bi)^4 = a^4 - \frac{4 \cdot 3 \cdot a^2 b^2}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^0 b^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \left(+4 \cdot a^3 b - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a^1 b^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) i$$

$$= a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + (4a^3b - 4ab^3)\, i$$

(siehe Antwort auf Frage 48):

$$\left(-\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{-3 \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right)^4 = +\sqrt[3]{a^4} - 6 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{a^2} + \frac{1}{16} \cdot 9 \cdot \sqrt[3]{a^4}$$

$$+ \left(-4 \cdot \sqrt[3]{a^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} + 4 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}}\right) i$$

oder nach Erkl. 80 b:

$$= a\sqrt[3]{a} - \frac{9}{2}a\sqrt[3]{a} + \frac{9}{16}a\sqrt[3]{a} + \left(-2a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot a\sqrt[3]{a}\right) i$$

oder vereinigt:

$$= -\frac{47}{16}a\sqrt[3]{a} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot a \cdot \sqrt[3]{a}\, i$$

oder:

$$= \frac{1}{16}a\sqrt[3]{a} \cdot \left(-47 + \frac{1}{8}\sqrt{3} \cdot i\right)$$

Erkl. 80 b. Es gibt:

$$\sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{a^2}$$

$$= a \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

und

$$\sqrt{3^3 \cdot \sqrt[3]{a^6}} = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt[6]{a^6} = 3\sqrt{3a}$$

Aufgabe 34. Was erhält man für:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 48 gibt:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6$$

wenn man in die daselbst abgeleitete Formel für $a=2$, $b=3$ und $n=6$ einsetzt:

$$=2\cdot\left[2^6-\frac{6\cdot5\cdot2^4\cdot3^2}{1\cdot2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot3^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot3^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right]$$

$$=2\cdot[64-2160+4860-729]=2\cdot2035=4070$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 35. Nachstehende Potenzen sind mit Hilfe der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

a) $\left(7+6\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^4$

b) $(1+\sqrt{-1})^7$

c) $\left\{3-\sqrt{-25}+\left[i\cdot\sqrt{9}-(2i^2\cdot\sqrt{36}+\sqrt{144})+9i^2\right]+\sqrt{-81}\right\}^{-3}$

d) $(5-4i)^2+(2-i)^3-(1-5i)^4$

Andeutungen.

a) Auflösung mit Hilfe der in der Auflösung der Aufgabe 33 abgeleiteten Formel: $(a+bi)^4=a^4-6a^2b^2+b^4+(4a^3b-4ab^3)\cdot i$ durchzuführen.

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 32.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 31.

d) Auflösung nach Erkl. 78 und Aufgabe 33 durchzuführen.

Aufgabe 36. Was erhält man für:

$$(3+4i)^2-(3-4i)^2?$$

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 46 durchzuführen.

Aufgabe 37. Es sind die fünf ersten Potenzen von:

$$\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$$

ohne Anwendung der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

Andeutung. Die Berechnung geschieht durch direktes Ausmultiplizieren.

Aufgabe 38. Die in der Antwort auf Frage 47, b) entwickelte Formel:

$$(a\pm bi)^{-3}=\frac{1}{(a^3-3ab^2)+(\pm3a^2b\mp b^3)i}$$

ist nach der Antwort auf Frage 42 weiter zu behandeln.

Andeutung. Auflösung ähnlich wie in der Antwort auf Frage 46, b).

---

e) Ueber die Quadratwurzel.

Anmerkung 7. Ist der Wurzelexponent grösser als 2, so erfolgt die Radizierung einer komplexen Zahl nach dem sogen. Moivreschen Satze, dessen Ableitung und Anwendung im Teil D dieses Werkes gelehrt werden wird. Ist der Wurzelexponent