Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

e) Ueber die Quadartwurzel

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Aufgabe 34. Was erhält man für:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6?$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 48 gibt:

$$(2+3i)^6+(2-3i)^6$$

wenn man in die daselbst abgeleitete Formel für $a=2$, $b=3$ und $n=6$ einsetzt:

$$=2\cdot\left[2^6-\frac{6\cdot5\cdot2^4\cdot3^2}{1\cdot2}+\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2^2\cdot3^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2^0\cdot3^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\right]$$

$$=2\cdot[64-2160+4860-729]=2\cdot2035=4070$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 35. Nachstehende Potenzen sind mit Hilfe der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

a) $\left(7+6\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)^4$

b) $(1+\sqrt{-1})^7$

c) $\left\{3-\sqrt{-25}+\left[i\cdot\sqrt{9}-(2i^2\cdot\sqrt{36}+\sqrt{144})+9i^2\right]+\sqrt{-81}\right\}^{-3}$

d) $(5-4i)^2+(2-i)^3-(1-5i)^4$

Andeutungen.

a) Auflösung mit Hilfe der in der Auflösung der Aufgabe 33 abgeleiteten Formel: $(a+bi)^4=a^4-6a^2b^2+b^4+(4a^3b-4ab^3)\cdot i$ durchzuführen.

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 32.

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 31.

d) Auflösung nach Erkl. 78 und Aufgabe 33 durchzuführen.

Aufgabe 36. Was erhält man für:

$$(3+4i)^2-(3-4i)^2?$$

Andeutung. Auflösung nach der Antwort auf Frage 46 durchzuführen.

Aufgabe 37. Es sind die fünf ersten Potenzen von:

$$\left(2\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}-3\cdot\sqrt{-\frac{1}{3}}\right)$$

ohne Anwendung der Formel des binomischen Lehrsatzes zu berechnen.

Andeutung. Die Berechnung geschieht durch direktes Ausmultiplizieren.

Aufgabe 38. Die in der Antwort auf Frage 47, b) entwickelte Formel:

$$(a\pm bi)^{-3}=\frac{1}{(a^3-3ab^2)+(\pm3a^2b\mp b^3)i}$$

ist nach der Antwort auf Frage 42 weiter zu behandeln.

Andeutung. Auflösung ähnlich wie in der Antwort auf Frage 46, b).

---

e) Ueber die Quadratwurzel.

Anmerkung 7. Ist der Wurzelexponent grösser als 2, so erfolgt die Radizierung einer komplexen Zahl nach dem sogen. Moivreschen Satze, dessen Ableitung und Anwendung im Teil D dieses Werkes gelehrt werden wird. Ist der Wurzelexponent

gleich 3, so könnte man in ähnlicher Weise wie bei der Quadratwurzel auch ohne Benutzung der Moivreschen Formel die Wurzel ermitteln. Da dieses Verfahren aber umständlicher und schwieriger ist, so soll es hier unberücksichtigt bleiben.

Frage 51. Wie wird aus einer komplexen Zahl die Quadratwurzel gezogen?

Antwort. Man erhält für:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Beweis. Setzt man für:

$$\sqrt{a+bi} = x+yi$$

und für:

$$\sqrt{a-bi} = x-yi$$

unter der Voraussetzung, dass x und y (gleich wie a und b) reelle Zahlen bedeuten, so ist:

$$(\sqrt{a+bi})^2 = (x+yi)^2$$

oder:

$$(a+bi) = x^2+2xyi-y^2 \text{ (nach Erkl. 78)}$$

oder:

$$= (x^2-y^2)+2xyi$$

und

$$(\sqrt{a-bi})^2 = (x-yi)^2$$

oder:

$$(a-bi) = x^2-2xyi-y^2 = (x^2-y^2)-2xyi$$

Hieraus folgt, dass:

$$a = x^2-y^2$$

oder:

$$a^2 = (x^2-y^2)^2 = x^4-2x^2y^2+y^4$$

(nach Erkl. 70)

und

$$b = 2xy$$

oder:

$$b^2 = 4x^2y^2$$

ist. Addiert man a^2 und b^2, so ergibt sich:

$$a^2+b^2 = x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2 = x^4+2x^2y^2+y^4$$

d. i.:

$$= (x^2+y^2)^2$$

Demnach ist:

$$\pm\sqrt{a^2+b^2} = \pm\sqrt{(x^2+y^2)^2} = (x^2+y^2)$$

Nun war nach Voraussetzung:

$$(x^2-y^2) = a$$

folglich ist:

$$a\pm\sqrt{a^2+b^2} = x^2+y^2+(x^2-y^2) = 2x^2$$

oder:

$$x^2 = \frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Ferner ist:

$$-a \pm \sqrt{a^2+b^2} = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2) = 2y^2$$

oder:

$$y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass vor $\sqrt{a^2+b^2}$ im vorliegenden Falle nur das Pluszeichen Gültigkeit haben kann. $\sqrt{a^2+b^2}$ ist [auch bei negativem b, denn $(-b)^2 = +b^2$], stets grösser als a. Würde man diese Wurzel nun negativ nehmen, so würde:

$$\sqrt{\frac{\pm a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

imaginär werden; es würde sich also für die reellen Zahlen x und y Imaginäres ergeben, was keinen Sinn hat.

Demnach hat man für:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

und für:

$$y = +\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

zu setzen und erhält also:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{a-bi} = x - yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Erkl. 81. Ist a negativ, so ergibt sich:

$$\sqrt{-a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{-a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 39. Man soll die folgenden Quadratwurzeln ziehen.

a) $\sqrt{3+4i}$

Auflösungen.

a) Setzt man in die Formel:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a = 3$ und $b = 4$ ein, so erhält man:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}}\right]$$

oder:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right] = \pm\left[\sqrt{4} + i\cdot\sqrt{1}\right] = \pm(2+i)$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{-8}}$

b) Wird in die Formel:

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a=1$ und $b=\sqrt{8}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\sqrt{1-i\sqrt{8}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8}}{2}}\right]$$

oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{1+3}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+3}{2}}\right]=\pm(\sqrt{2}-i)$$

c) $\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}$

c) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}=\sqrt{\frac{n(m^2-p\cdot o^2)}{o^2}+\frac{2imn\sqrt{p}}{o}}$$

und wenn man in die Formel in der Antwort auf Frage 51 für $a=\frac{n(m^2-po^2)}{o^2}$ und für $b=\frac{2mn\sqrt{p}}{o}$ einsetzt:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{n\cdot(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-n(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right\}$$ (siehe Erkl. 82)

oder:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]$$ (siehe Erkl. 82 a)

oder gekürzt und soweit als möglich die Wurzeln gezogen:

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

Erkl. 82. Es ist:

$$\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}=\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^4+p^2o^4-2m^2po^2)}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}$$ (nach Erkl. 70)

oder:

$$=\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4-2m^2n^2po^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2po^2}{o^4}}$$ (nach Erkl. 34)

oder vereinigt:

$$\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4+2m^2n^2po^2}{o^4}}$$

d. i.:

$$=\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}=\frac{m^2n+no^2p}{o^2}$$

Erkl. 82 a. Man erhält für:

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{nm^2-no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-nm^2+no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]=\pm\left[\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}}+i\sqrt{np}\right]$$

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

---

d) $\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$

d) Es ist:

$$\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]$$

$$-\left\{\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]\right\}$$

oder, wenn nur das vor den eckigen Klammern stehende Pluszeichen berücksichtigt wird (weil sonst sich vier verschiedene Lösungen ergeben würden):

$$=+\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}-\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}$$

d. i.:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{-16+34}{2}}=2i\sqrt{9}=6i$$

---

e) $\sqrt{6i}$

e) Für $\sqrt{6i}$ kann man $\sqrt{0+6i}$ setzen und erhält alsdann:

$$\sqrt{0+6i}=\pm\left[\sqrt{\frac{0+\sqrt{0+36}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-0+\sqrt{0+36}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm(\sqrt{3}+i\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}\cdot(1+i)$$ (vergl. Erkl. 53)

---

f) $\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}$

f) Nach Erkl. 9 ist:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-5+\sqrt{-144}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{-13}}$$

Nun gibt:

$$\sqrt{-5+\sqrt{-144}} \text{ oder } \sqrt{-5+12i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+5+\sqrt{25+144}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+13}{2}}+i\sqrt{\frac{5+13}{2}}\right]=\pm(2+3i)$$

und

$$\sqrt{6-\sqrt{-13}}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+13}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+13}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{6+7}{2}}-i\sqrt{\frac{-6+7}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Berücksichtigt man nur die vor den eckigen Klammern stehenden Pluszeichen, so erhält man für:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=(2+3i)\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

oder:

$$=2\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}+3i\sqrt{\frac{13}{2}}-2i\sqrt{\frac{1}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(2\sqrt{\frac{13}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(3\sqrt{\frac{13}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\left[(2\sqrt{13}+3)+(3\cdot\sqrt{13}-2)i\right]$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=0{,}707\cdot[(2\cdot3{,}606+3)+(3\cdot3{,}606-2)i]=7{,}220+6{,}234i$$

Erkl. 83. Statt wie nebenstehend die Faktoren einzeln zu radizieren, kann man auch aus dem Produkte die Wurzel ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-30+72i+5i\sqrt{13}+12\cdot\sqrt{13}}$$

(nach Antwort auf Frage 33)

$$=\sqrt{(-30+12\sqrt{13})+(72+5\sqrt{13})\cdot i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\sqrt{13})^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{-(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\cdot\sqrt{13})^2}}{2}}\right]$$

(nach Antwort auf Frage 51) oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\cdot\sqrt{13}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\sqrt{13}}}{2}}\right]$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}+i\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+91}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+91}{2}}\right]$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{61+12\sqrt{13}}+i\cdot\sqrt{121-12\sqrt{13}}\right)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\pm0{,}707\cdot(10{,}212+8{,}818i)=7{,}220+6{,}234i$$

g) $\sqrt{\dfrac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$

g) Nach Erkl. 31 ist:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{6+8i}}{\sqrt{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$$

Der Zähler dieses Bruches gibt nach Antwort auf Frage 51:

$$\sqrt{6+8i}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+64}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+64}}{2}}\right]$$
$$=\pm[\sqrt{8}+i\cdot\sqrt{2}]=\pm[2\sqrt{2}+i\sqrt{2}]=\pm\sqrt{2}\cdot(2+i)$$

und der Nenner desselben:

$$\sqrt{16-24i\sqrt{5}}=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}\right]$$
$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{3136}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}\right]=\pm(6-2i\sqrt{5})$$

(siehe Erkl. 84)

Mithin erhält man für:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)}{6-2i\sqrt{5}}$$

wenn man nur die + Zeichen vor den Klammern berücksichtigt; oder (nach Antwort auf Frage 38):

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)\cdot(6+2i\sqrt{5})}{(6-2i\sqrt{5})(6+2i\sqrt{5})}=\frac{12\sqrt{2}+6i\sqrt{2}+4i\sqrt{10}-2\sqrt{10}}{36+20}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{2(6\sqrt{2}-\sqrt{10})+2i(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})}{56}$$

d. i.:

$$=\frac{(6\sqrt{2}-\sqrt{10})}{28}+\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})i}{28}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\frac{(6\cdot1{,}414-3{,}162)}{28}+\frac{(3\cdot1{,}414+2\cdot3{,}162)\cdot i}{28}=0{,}190+0{,}377i)$$

Erkl. 84. Man erhält für:

$$\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}=\sqrt{\frac{-16+56}{2}}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=2\sqrt{5}$$

Erkl. 85. Statt (wie obenstehend) die Wurzel aus Zähler und Nenner für sich zu ziehen, kann man sie auch aus dem Quotienten ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(6+8i)\cdot(16+24i\cdot\sqrt{5})}{(16-24i\sqrt{5})\cdot(16+24i\sqrt{5})}}$$ (nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$=\sqrt{\frac{96+128i+144i\sqrt{5}-192\sqrt{5}}{256+576\cdot5}}$$

oder vereinigt:

$$=\sqrt{\frac{96\cdot(1-2\sqrt{5})+16i(8+9\sqrt{5})}{3136}}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{3136}\cdot[6\cdot(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})]}$$
$$=\frac{1}{14}\cdot\sqrt{6(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= 0{,}071 \cdot \sqrt{-20{,}832 + 28{,}124\,i}$$

oder nach Antwort auf Frage 51:

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}}\right]$$

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + 35}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + 35}{2}}\right]$$

d. i.: $= 0{,}071 \cdot (2{,}661 + 5{,}283) = 0{,}189 + 0{,}375\,i$

(Bem. Die geringe Differenz zwischen diesem und dem obenstehenden Resultate ist eine Folge der Abkürzung sämtlicher Dezimalbrüche auf 3 Stellen.)

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Es sind nachstehende Quadratwurzeln zu ermitteln.

a) $\sqrt{4 + 3\,i}$

b) $\sqrt{-12 - \sqrt{-25}}$

c) $\sqrt{11\,i}$

d) $\sqrt{(-3 + 4\,i) \cdot (-2 + 4\,i\sqrt{6})}$

e) $\sqrt{\dfrac{7 \cdot \sqrt{121} - 24 \cdot \sqrt{-\frac{9}{4}}}{24 + \sqrt{-100}}}$

f) $\sqrt{\dfrac{25\,x^2 r}{z^2} - \dfrac{4\,x^2 y}{r} - \dfrac{20\,x^2 \cdot \sqrt{-y}}{z}}$

g) $\sqrt{2 + \sqrt{-64}} + \sqrt{2 - 8\,i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, b).

c) Man schreibe für $\sqrt{11\,i} = \sqrt{0 + 11\,i}$ und verfahre dann nach der Antwort auf Frage 51.

d) Man ziehe aus jedem Faktor die Wurzel und multipliziere die resultierenden komplexen Zahlen miteinander. (Zum Vergleiche wende man dann das zweite Verfahren an, d. h. man multipliziere erst die beiden Faktoren miteinander und ziehe hierauf aus ihrem Produkt die Wurzel, wie in Erkl. 83 gezeigt wurde.)

e) Man ziehe zunächst die kleinen Quadratwurzeln und hierauf sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel und führe endlich die Division aus. (Zum Vergleiche führe man darauf zuerst die Division aus und ziehe alsdann aus dem Quotienten die Wurzel.) (Vergl. Erkl. 85.)

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, c).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, d). (Es sollen nur die vor den Klammern [Wurzeln] stehenden + Zeichen berücksichtigt werden.)