Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

d. i.:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Ferner ist:

$$-a \pm \sqrt{a^2+b^2} = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2) = 2y^2$$

oder:

$$y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

d. i.:

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass vor $\sqrt{a^2+b^2}$ im vorliegenden Falle nur das Pluszeichen Gültigkeit haben kann. $\sqrt{a^2+b^2}$ ist [auch bei negativem b, denn $(-b)^2 = +b^2$], stets grösser als a. Würde man diese Wurzel nun negativ nehmen, so würde:

$$\sqrt{\frac{\pm a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

imaginär werden; es würde sich also für die reellen Zahlen x und y Imaginäres ergeben, was keinen Sinn hat.

Demnach hat man für:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

und für:

$$y = +\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

zu setzen und erhält also:

$$\sqrt{a+bi} = x + yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{a-bi} = x - yi = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

Erkl. 81. Ist a negativ, so ergibt sich:

$$\sqrt{-a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

und

$$\sqrt{-a-bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 39. Man soll die folgenden Quadratwurzeln ziehen.

a) $\sqrt{3+4i}$

Auflösungen.

a) Setzt man in die Formel:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a = 3$ und $b = 4$ ein, so erhält man:

$$\sqrt{3+4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}}\right]$$

oder:

$$= \pm\left[\sqrt{\frac{3+5}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{-3+5}{2}}\right] = \pm[\sqrt{4} + i\cdot\sqrt{1}] = \pm(2+i)$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{-8}}$

b) Wird in die Formel:

$$\sqrt{a-bi}=\pm\left[\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right]$$

für $a=1$ und $b=\sqrt{8}$ gesetzt, so ergibt sich:

$$\sqrt{1-i\sqrt{8}}=\pm\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+8}}{2}}\right]$$

oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{1+3}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-1+3}{2}}\right]=\pm(\sqrt{2}-i)$$

c) $\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}$

c) Man erhält zunächst für:

$$\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}-np+\frac{imn\sqrt{4p}}{o}}=\sqrt{\frac{n(m^2-p\cdot o^2)}{o^2}+\frac{2imn\sqrt{p}}{o}}$$

und wenn man in die Formel in der Antwort auf Frage 51 für $a=\frac{n(m^2-po^2)}{o^2}$ und für $b=\frac{2mn\sqrt{p}}{o}$ einsetzt:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{n\cdot(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-n(m^2-po^2)}{o^2}+\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}}{2}}\right\}$$ (siehe Erkl. 82)

oder:

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]$$ (siehe Erkl. 82 a)

oder gekürzt und soweit als möglich die Wurzeln gezogen:

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

Erkl. 82. Es ist:

$$\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^2-po^2)^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}=\sqrt{\frac{n^2\cdot(m^4+p^2o^4-2m^2po^2)}{o^4}+\frac{4m^2n^2p}{o^2}}$$ (nach Erkl. 70)

oder:

$$=\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4-2m^2n^2po^2}{o^4}+\frac{4m^2n^2po^2}{o^4}}$$ (nach Erkl. 34)

oder vereinigt:

$$\sqrt{\frac{m^4n^2+n^2p^2o^4+2m^2n^2po^2}{o^4}}$$

d. i.:

$$=\frac{1}{o^2}\cdot\sqrt{(m^2n+no^2p)^2}=\frac{m^2n+no^2p}{o^2}$$

Erkl. 82 a. Man erhält für:

$$\pm\left\{\sqrt{\frac{\frac{nm^2-no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{\frac{-nm^2+no^2p}{o^2}+\frac{m^2n+no^2p}{o^2}}{2}}\right\}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{nm^2-no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-nm^2+no^2p+m^2n+no^2p}{2o^2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{2m^2n}{2o^2}}+i\sqrt{\frac{2no^2p}{2o^2}}\right]=\pm\left[\sqrt{\frac{m^2n}{o^2}}+i\sqrt{np}\right]$$

$$=\pm\left(\frac{m}{o}\sqrt{n}+i\sqrt{np}\right)$$

---

d) $\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$

d) Es ist:

$$\sqrt{16+\sqrt{-30}}-\sqrt{16-\sqrt{-30}}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]$$

$$-\left\{\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right]\right\}$$

oder, wenn nur das vor den eckigen Klammern stehende Pluszeichen berücksichtigt wird (weil sonst sich vier verschiedene Lösungen ergeben würden):

$$=+\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}-\sqrt{\frac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{1156}}{2}}$$

d. i.:

$$=2i\cdot\sqrt{\frac{-16+34}{2}}=2i\sqrt{9}=6i$$

---

e) $\sqrt{6i}$

e) Für $\sqrt{6i}$ kann man $\sqrt{0+6i}$ setzen und erhält alsdann:

$$\sqrt{0+6i}=\pm\left[\sqrt{\frac{0+\sqrt{0+36}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-0+\sqrt{0+36}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm(\sqrt{3}+i\sqrt{3})=\pm\sqrt{3}\cdot(1+i)$$ (vergl. Erkl. 53)

---

f) $\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}$

f) Nach Erkl. 9 ist:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-5+\sqrt{-144}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{-13}}$$

Nun gibt:

$$\sqrt{-5+\sqrt{-144}} \text{ oder } \sqrt{-5+12i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+\sqrt{25+144}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+5+\sqrt{25+144}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-5+13}{2}}+i\sqrt{\frac{5+13}{2}}\right]=\pm(2+3i)$$

und

$$\sqrt{6-\sqrt{-13}}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+13}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+13}}{2}}\right]$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{6+7}{2}}-i\sqrt{\frac{-6+7}{2}}\right]=\pm\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

Berücksichtigt man nur die vor den eckigen Klammern stehenden Pluszeichen, so erhält man für:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=(2+3i)\cdot\left(\sqrt{\frac{13}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

oder:

$$=2\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}+3i\sqrt{\frac{13}{2}}-2i\sqrt{\frac{1}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(2\sqrt{\frac{13}{2}}+3\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(3\sqrt{\frac{13}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)i$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\left[(2\sqrt{13}+3)+(3\cdot\sqrt{13}-2)i\right]$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=0{,}707\cdot[(2\cdot3{,}606+3)+(3\cdot3{,}606-2)i]=7{,}220+6{,}234i$$

Erkl. 83. Statt wie nebenstehend die Faktoren einzeln zu radizieren, kann man auch aus dem Produkte die Wurzel ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{(-5+\sqrt{-144})\cdot(+6-\sqrt{-13})}=\sqrt{-30+72i+5i\sqrt{13}+12\cdot\sqrt{13}}$$

(nach Antwort auf Frage 33)

$$=\sqrt{(-30+12\sqrt{13})+(72+5\sqrt{13})\cdot i}$$

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\sqrt{13})^2}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{-(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{(-30+12\sqrt{13})^2+(72+5\cdot\sqrt{13})^2}}{2}}\right]$$

(nach Antwort auf Frage 51) oder:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{(-30+12\sqrt{13})+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\cdot\sqrt{13}}}{2}}\right.$$

$$\left.+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{+900+1872-720\sqrt{13}+5184+325+720\sqrt{13}}}{2}}\right]$$

oder vereinigt:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}+i\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+\sqrt{8281}}{2}}\right]$$

d. i.:

$$=\pm\left[\sqrt{\frac{-30+12\sqrt{13}+91}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{+30-12\sqrt{13}+91}{2}}\right]$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sqrt{61+12\sqrt{13}}+i\cdot\sqrt{121-12\sqrt{13}}\right)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\pm0{,}707\cdot(10{,}212+8{,}818i)=7{,}220+6{,}234i$$

g) $\sqrt{\dfrac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$

g) Nach Erkl. 31 ist:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\cdot\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{6+8i}}{\sqrt{16-24i\cdot\sqrt{5}}}$$

Der Zähler dieses Bruches gibt nach Antwort auf Frage 51:

$$\sqrt{6+8i}=\pm\left[\sqrt{\frac{6+\sqrt{36+64}}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{-6+\sqrt{36+64}}{2}}\right]$$
$$=\pm[\sqrt{8}+i\cdot\sqrt{2}]=\pm[2\sqrt{2}+i\sqrt{2}]=\pm\sqrt{2}\cdot(2+i)$$

und der Nenner desselben:

$$\sqrt{16-24i\sqrt{5}}=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{256+576\cdot5}}{2}}\right]$$
$$=\pm\left[\sqrt{\frac{16+\sqrt{3136}}{2}}-i\cdot\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}\right]=\pm(6-2i\sqrt{5})$$

(siehe Erkl. 84)

Mithin erhält man für:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)}{6-2i\sqrt{5}}$$

wenn man nur die + Zeichen vor den Klammern berücksichtigt; oder (nach Antwort auf Frage 38):

$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+i)\cdot(6+2i\sqrt{5})}{(6-2i\sqrt{5})(6+2i\sqrt{5})}=\frac{12\sqrt{2}+6i\sqrt{2}+4i\sqrt{10}-2\sqrt{10}}{36+20}$$

oder vereinigt:

$$=\frac{2(6\sqrt{2}-\sqrt{10})+2i(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})}{56}$$

d. i.:

$$=\frac{(6\sqrt{2}-\sqrt{10})}{28}+\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{10})i}{28}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$=\frac{(6\cdot1{,}414-3{,}162)}{28}+\frac{(3\cdot1{,}414+2\cdot3{,}162)\cdot i}{28}=0{,}190+0{,}377i)$$

Erkl. 84. Man erhält für:

$$\sqrt{\frac{-16+\sqrt{3136}}{2}}=\sqrt{\frac{-16+56}{2}}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=2\sqrt{5}$$

Erkl. 85. Statt (wie obenstehend) die Wurzel aus Zähler und Nenner für sich zu ziehen, kann man sie auch aus dem Quotienten ziehen. Man erhält alsdann:

$$\sqrt{\frac{6+8i}{16-24i\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(6+8i)\cdot(16+24i\cdot\sqrt{5})}{(16-24i\sqrt{5})\cdot(16+24i\sqrt{5})}}$$ (nach Antwort auf Frage 38)

oder:

$$=\sqrt{\frac{96+128i+144i\sqrt{5}-192\sqrt{5}}{256+576\cdot5}}$$

oder vereinigt:

$$=\sqrt{\frac{96\cdot(1-2\sqrt{5})+16i(8+9\sqrt{5})}{3136}}$$
$$=\sqrt{\frac{16}{3136}\cdot[6\cdot(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})]}$$
$$=\frac{1}{14}\cdot\sqrt{6(1-2\sqrt{5})+i(8+9\sqrt{5})}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$= 0{,}071 \cdot \sqrt{-20{,}832 + 28{,}124\,i}$$

oder nach Antwort auf Frage 51:

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + \sqrt{20{,}832^2 + 28{,}124^2}}{2}}\right]$$

$$= 0{,}071 \cdot \left[\sqrt{\frac{-20{,}832 + 35}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{20{,}832 + 35}{2}}\right]$$

d. i.: $= 0{,}071 \cdot (2{,}661 + 5{,}283) = 0{,}189 + 0{,}375\,i$

(Bem. Die geringe Differenz zwischen diesem und dem obenstehenden Resultate ist eine Folge der Abkürzung sämtlicher Dezimalbrüche auf 3 Stellen.)

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 40. Es sind nachstehende Quadratwurzeln zu ermitteln.

a) $\sqrt{4 + 3\,i}$

b) $\sqrt{-12 - \sqrt{-25}}$

c) $\sqrt{11\,i}$

d) $\sqrt{(-3 + 4\,i) \cdot (-2 + 4\,i\sqrt{6})}$

e) $\sqrt{\dfrac{7 \cdot \sqrt{121} - 24 \cdot \sqrt{-\frac{9}{4}}}{24 + \sqrt{-100}}}$

f) $\sqrt{\dfrac{25\,x^2 r}{z^2} - \dfrac{4\,x^2 y}{r} - \dfrac{20\,x^2 \cdot \sqrt{-y}}{z}}$

g) $\sqrt{2 + \sqrt{-64}} + \sqrt{2 - 8\,i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, b).

c) Man schreibe für $\sqrt{11\,i} = \sqrt{0 + 11\,i}$ und verfahre dann nach der Antwort auf Frage 51.

d) Man ziehe aus jedem Faktor die Wurzel und multipliziere die resultierenden komplexen Zahlen miteinander. (Zum Vergleiche wende man dann das zweite Verfahren an, d. h. man multipliziere erst die beiden Faktoren miteinander und ziehe hierauf aus ihrem Produkt die Wurzel, wie in Erkl. 83 gezeigt wurde.)

e) Man ziehe zunächst die kleinen Quadratwurzeln und hierauf sowohl aus dem Zähler als auch aus dem Nenner die Wurzel und führe endlich die Division aus. (Zum Vergleiche führe man darauf zuerst die Division aus und ziehe alsdann aus dem Quotienten die Wurzel.) (Vergl. Erkl. 85.)

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, c).

g) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 39, d). (Es sollen nur die vor den Klammern [Wurzeln] stehenden + Zeichen berücksichtigt werden.)