Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber die graphische Darstellung der imaginären Einheit

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

C. Ueber die graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Anmerkung 8. Zum Verständnis des Nachfolgenden sind diejenigen Kenntnisse der Planimetrie und Trigonometrie erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der ebenen Elementargeometrie von Kleyer und Sachs, der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie von Kleyer erlangt werden können.

1) Ueber die graphische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

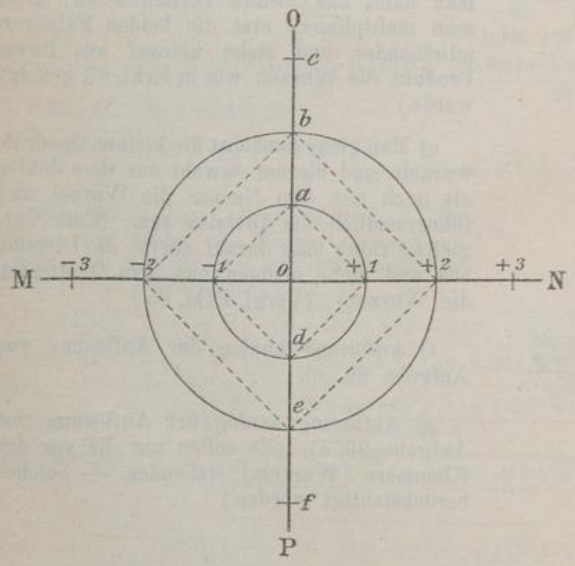
Anmerkung 9. Durch die graphische (oder geometrische) Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen wird das Verständnis für diese Zahlen — besonders aber für die veränderlichen Komplexen — wesentlich erleichtert. Aus diesem Grunde wird dem Studierenden das Nachstehende einer besonderen Beachtung dringend empfohlen.

a) Ueber die graphische Darstellung der imaginären Einheit.

Frage 52. Auf welche Weise lässt sich die imaginäre Einheit graphisch (geometrisch) darstellen?

Erkl. 86. Das Wort „graphisch" stammt aus dem Griechischen und bedeutet „zeichnerisch" oder auch „bildlich".

Figur 1.



Antwort. Die imaginäre Einheit $\pm i$ ist nach der Antwort auf Frage 4, e) die mittlere Proportionale (siehe Erkl. 21) von $+1$ und -1, welche man graphisch (geometrisch) wie folgt darstellen kann. Man trägt von einem beliebigen Punkte (dem Nullpunkt oder Pol) einer unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 1) nach rechts und links in beliebig grossen, aber gleichen Abständen Punkte auf und numeriert sie nach rechts mit den positiven, nach links mit den negativen reellen ganzen Zahlen (s. Erkl. 87). Hierauf errichtet man auf dieser Linie im Punkte 0 eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte Normale OP und schlägt mit dem Halbmesser $\overline{01}$ einen Kreis. Dieser schneidet OP in a und d. Dann ist $\overline{0a} = \overline{0d}$, und man erhält (nach Erkl. 88) die Proportion:

$$+1 : \overline{0a} = \overline{0a} : -1$$

Hieraus ergibt sich:

$$(\overline{0a})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

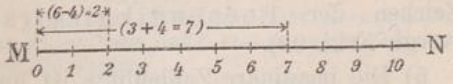
(nach Erkl. 20a)

oder:

$$\overline{0a} = \sqrt{-1}$$

Erkl. 87. Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, d. h. die absoluten ganzen Zahlen (siehe Erkl. 12), kann man sich durch eine Reihe von Punkten, welche von irgend einem Anfangspunkte (Nullpunkte) aus auf einer einseitig unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 2) in beliebig grossen, jedoch gleichen Abständen aufgetragen ist, versinnbildlicht denken.

Figur 2.

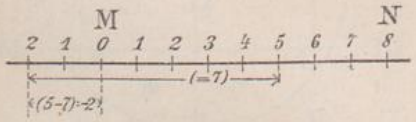


Dann lässt sich eine Addition oder Subtraktion leicht bewerkstelligen. Sollen zwei Zahlen (z. B. 3 und 4) addiert werden, so hat man nur von dem Punkte, welcher zum ersten Summand (3) gehört, um so viele Striche nach rechts (also vom Nullpunkte fort) zu gehen, als der zweite Summand (4) Einheiten enthält. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte $(\overline{07})$ stellt dann die gesuchte Summe dar.

Soll dagegen von einer Zahl (z. B. 6) eine andere (z. B. 4) subtrahiert werden, so muss man von dem Punkte des Minuendus (6) um so viele Striche nach links (also nach dem Nullpunkte hin) gehen, als der Subtrahendus (4) Einheiten besitzt. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte $(\overline{02})$ stellt dann die gesuchte Differenz dar (Figur 2).

Ist der Subtrahendus grösser als der Minuendus, so gelangt man bei diesem Verfahren nach links über den Nullpunkt hinaus, in die verlängerte MN hinein (z. B. bei $5-7$ um 2 Einheiten; Figur 3).

Figur 3.



Die aus den Differenzen mit grösserem Subtrahendus sich ergebenden negativen Zahlen kommen hiernach auf der Verlängerung von MN zur Darstellung. Die gerade Linie der reellen Zahlen ist daher als nach beiden Seiten hin unbegrenzt anzunehmen und es sind die positiven reellen Zahlen vom Nullpunkte aus nach der einen Richtung (z. B. nach rechts), die negativen dagegen nach der anderen Richtung (nach links) aufzutragen. Man erhält alsdann als graphische Darstellung der reellen Zahlen die (in Figur 1 abgebildete) Wagerechte MN.

Erkl. 88. Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet:

„Im rechtwinkligen Dreiecke ist die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die

Ferner folgt:

$$+1:\overline{0d} = \overline{0d}:-1$$

oder:

$$(\overline{0d})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

oder:

$$0d = \sqrt{-1}$$

Hiernach findet man den Punkt, welcher die imaginäre Einheit darstellt, sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Stücke der Normalen OP.

Um Irrtümer auszuschliessen, soll nun angenommen werden, dass die positive imaginäre Einheit durch die Strecke $\overline{0a}$, die negative durch die Strecke $\overline{0d}$ dargestellt wird (siehe Erkl. 90 und 90a).

Wird der Kreis mit einem Halbmesser $\overline{02}$ geschlagen, so ist $\overline{0a} = \overline{ab}$ und $\overline{0d} = \overline{de}$, und man erhält die Proportionen:

$$\left.\begin{array}{l} +2:\overline{0b} = \overline{0b}:-2 \\ \text{und} \quad +2:\overline{0e} = \overline{0e}:-2 \end{array}\right\} \text{(nach Erkl. 88)}$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$\overline{0b}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0b} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

und

$$\overline{0e}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0e} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

Es stellt also, weil die Punkte der positiven imaginären Zahlen auf $\overline{0O}$, die der negativen auf $\overline{0P}$ angenommen wurden, die Strecke $\overline{0b} = +2i$ und die Strecke $\overline{0e} = -2i$ dar.

Ist $\overline{bc}$ (Figur 1) $= \overline{ab}$ und $\overline{ef} = \overline{de}$, so erhält man:

$$\overline{0c} = +3i$$

und

$$0f = -3i \text{ u. s. f.}$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Die positive imaginäre Zahl bi wird durch eine Strecke dargestellt, welche der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit $(\overline{0a})$ gleich gerichtet ist; die negative imaginäre Zahl $-bi$ wird durch eine der Strecke bi entgegengesetzt gleiche Strecke dargestellt.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse."

(In Figur 1 sind die rechtwinkligen Dreiecke durch punktierte Linien dargestellt worden.)

Erkl. 89. Das bei der graphischen Darstellung der reellen und imaginären Zahlen (und auch sonst häufig) zur Anwendung gelangende Linienkreuz (Figur 1) wird nach seinem Erfinder Descartes (geb. 1596, gest. 1650) das „Kartesianische Koordinatensystem", die wagerechte Linie desselben die Abscisse (vom Lateinischen abscindere, abschneiden) und die auf ihr normal stehende Linie die Ordinate (vom Lateinischen ordinare, ordnen) genannt.

Erkl. 89a. Die Abscisse MN wird die reelle, die Ordinate OP die imaginäre Achse genannt. Ferner heisst die Strecke $0N$ die Achse der positiven reellen Zahlen, $0M$ die der negativen reellen Zahlen, $0O$ die Achse der positiven imaginären Zahlen und $0P$ die der negativen imaginären Zahlen.

Erkl. 90. Dass die Linie, welche die imaginären Zahlen versinnbildlicht, normal (perpendikulär) zur Linie der reellen Zahlen gerichtet sein muss, ergibt sich auch aus folgender Ueberlegung. Durch eine Drehung von 180° um den Nullpunkt der Linie MN (Figur 1) gelangt man von $+1$ nach -1 und durch eine nochmalige, gleichgrosse Drehung wieder von -1 zurück nach $+1$. Eine gleiche Wirkung kann man sich durch eine Multiplikation mit (-1) oder mit i^2 (weil $i^2 = -1$ ist) hervorgebracht denken, denn wenn man $+1$ mit i^2 multipliziert, so gelangt man ebenfalls zu -1, und wenn man -1 mit i^2 multipliziert, zu $+1$. Wenn nun eine Multiplikation mit i^2 oder eine zweimalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 180° entspricht, so muss eine einmalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 90° gleichkommen, also $(\pm 1) \cdot i = \pm i$ (d. i. $= \overline{0a}$ oder $= \overline{0d}$) mit $+1$ und -1 (d. i. mit MN) einen Winkel von 90° bilden.

Erkl. 90a. Welche der beiden Richtungen der imaginären Zahlenlinie man als die positive, welche als die negative annehmen will, ist ähnlich wie bei der reellen Zahlenlinie willkürlich.

2) Die reellen und imaginären Einheiten ($+1$, -1, $+i$ und $-i$) sind an Grösse gleich, in der Richtung aber von einander verschieden.

3) Das Zahlengebiet hat zwei Hauptrichtungen, die reelle und die imaginäre (vergl. Erkl. 89a).

4) Die imaginäre Einheit ist das Zeichen der Perpendikularität (vergl. Erkl. 90).

5) Die imaginäre Zahlenlinie ist nur durch ihre Beziehung zur reellen Zahlenlinie imaginär. Wird die Wagerechte als die reelle Zahlenlinie betrachtet, so ist die Senkrechte als die imaginäre Zahlenlinie anzusehen. Stellt die Senkrechte jedoch die reellen Zahlen dar, so liegen auf der Wagerechten die imaginären.

---

b) Ueber die graphische Darstellung der komplexen Zahlen.

Frage 53. Auf welche Weise lässt sich eine komplexe Zahl graphisch (geometrisch) darstellen?

Antwort. Eine jede komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen, einem reellen und einem imaginären. Der den reellen Teil der Komplexen darstellende Punkt

Erkl. 91. Die komplexe Zahl $a + bi$ ist abhängig von zwei von einander völlig unab-