Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

1) Ueber die graphische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

C. Ueber die graphische und trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Anmerkung 8. Zum Verständnis des Nachfolgenden sind diejenigen Kenntnisse der Planimetrie und Trigonometrie erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der ebenen Elementargeometrie von Kleyer und Sachs, der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie von Kleyer erlangt werden können.

1) Ueber die graphische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

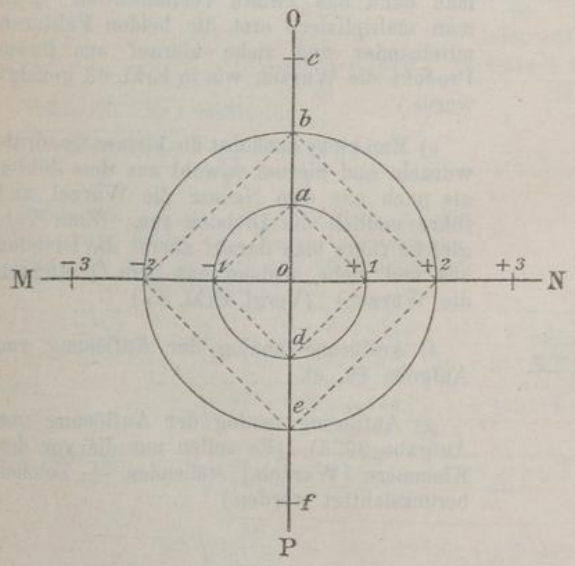
Anmerkung 9. Durch die graphische (oder geometrische) Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen wird das Verständnis für diese Zahlen — besonders aber für die veränderlichen Komplexen — wesentlich erleichtert. Aus diesem Grunde wird dem Studierenden das Nachstehende einer besonderen Beachtung dringend empfohlen.

a) Ueber die graphische Darstellung der imaginären Einheit.

Frage 52. Auf welche Weise lässt sich die imaginäre Einheit graphisch (geometrisch) darstellen?

Erkl. 86. Das Wort „graphisch" stammt aus dem Griechischen und bedeutet „zeichnerisch" oder auch „bildlich".

Figur 1.



Antwort. Die imaginäre Einheit $\pm i$ ist nach der Antwort auf Frage 4, e) die mittlere Proportionale (siehe Erkl. 21) von $+1$ und -1, welche man graphisch (geometrisch) wie folgt darstellen kann. Man trägt von einem beliebigen Punkte (dem Nullpunkt oder Pol) einer unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 1) nach rechts und links in beliebig grossen, aber gleichen Abständen Punkte auf und numeriert sie nach rechts mit den positiven, nach links mit den negativen reellen ganzen Zahlen (s. Erkl. 87). Hierauf errichtet man auf dieser Linie im Punkte 0 eine nach beiden Seiten hin unbegrenzte Normale OP und schlägt mit dem Halbmesser $\overline{01}$ einen Kreis. Dieser schneidet OP in a und d. Dann ist $\overline{0a} = \overline{0d}$, und man erhält (nach Erkl. 88) die Proportion:

$$+1 : \overline{0a} = \overline{0a} : -1$$

Hieraus ergibt sich:

$$(\overline{0a})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

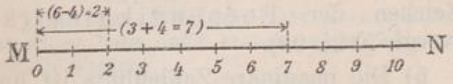
(nach Erkl. 20a)

oder:

$$\overline{0a} = \sqrt{-1}$$

Erkl. 87. Die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe, d. h. die absoluten ganzen Zahlen (siehe Erkl. 12), kann man sich durch eine Reihe von Punkten, welche von irgend einem Anfangspunkte (Nullpunkte) aus auf einer einseitig unbegrenzten geraden Linie MN (Figur 2) in beliebig grossen, jedoch gleichen Abständen aufgetragen ist, versinnbildlicht denken.

Figur 2.

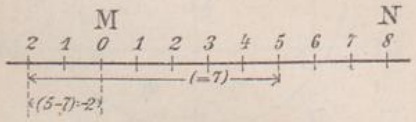


Dann lässt sich eine Addition oder Subtraktion leicht bewerkstelligen. Sollen zwei Zahlen (z. B. 3 und 4) addiert werden, so hat man nur von dem Punkte, welcher zum ersten Summand (3) gehört, um so viele Striche nach rechts (also vom Nullpunkte fort) zu gehen, als der zweite Summand (4) Einheiten enthält. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte $(\overline{07})$ stellt dann die gesuchte Summe dar.

Soll dagegen von einer Zahl (z. B. 6) eine andere (z. B. 4) subtrahiert werden, so muss man von dem Punkte des Minuendus (6) um so viele Striche nach links (also nach dem Nullpunkte hin) gehen, als der Subtrahendus (4) Einheiten besitzt. Die Strecke vom Nullpunkte bis zum Endpunkte $(\overline{02})$ stellt dann die gesuchte Differenz dar (Figur 2).

Ist der Subtrahendus grösser als der Minuendus, so gelangt man bei diesem Verfahren nach links über den Nullpunkt hinaus, in die verlängerte MN hinein (z. B. bei $5-7$ um 2 Einheiten; Figur 3).

Figur 3.



Die aus den Differenzen mit grösserem Subtrahendus sich ergebenden negativen Zahlen kommen hiernach auf der Verlängerung von MN zur Darstellung. Die gerade Linie der reellen Zahlen ist daher als nach beiden Seiten hin unbegrenzt anzunehmen und es sind die positiven reellen Zahlen vom Nullpunkte aus nach der einen Richtung (z. B. nach rechts), die negativen dagegen nach der anderen Richtung (nach links) aufzutragen. Man erhält alsdann als graphische Darstellung der reellen Zahlen die (in Figur 1 abgebildete) Wagerechte MN.

Erkl. 88. Ein Lehrsatz der Planimetrie lautet:

„Im rechtwinkligen Dreiecke ist die aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die

Ferner folgt:

$$+1:\overline{0d} = \overline{0d}:-1$$

oder:

$$(\overline{0d})^2 = (+1)\cdot(-1) = -1$$

oder:

$$0d = \sqrt{-1}$$

Hiernach findet man den Punkt, welcher die imaginäre Einheit darstellt, sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Stücke der Normalen OP.

Um Irrtümer auszuschliessen, soll nun angenommen werden, dass die positive imaginäre Einheit durch die Strecke $\overline{0a}$, die negative durch die Strecke $\overline{0d}$ dargestellt wird (siehe Erkl. 90 und 90a).

Wird der Kreis mit einem Halbmesser $\overline{02}$ geschlagen, so ist $\overline{0a} = \overline{ab}$ und $\overline{0d} = \overline{de}$, und man erhält die Proportionen:

$$\left.\begin{array}{l} +2:\overline{0b} = \overline{0b}:-2 \\ \text{und} \quad +2:\overline{0e} = \overline{0e}:-2 \end{array}\right\} \text{(nach Erkl. 88)}$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$\overline{0b}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0b} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

und

$$\overline{0e}^2 = -4$$

oder:

$$\overline{0e} = \sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

Es stellt also, weil die Punkte der positiven imaginären Zahlen auf $\overline{0O}$, die der negativen auf $\overline{0P}$ angenommen wurden, die Strecke $\overline{0b} = +2i$ und die Strecke $\overline{0e} = -2i$ dar.

Ist $\overline{bc}$ (Figur 1) $= \overline{ab}$ und $\overline{ef} = \overline{de}$, so erhält man:

$$\overline{0c} = +3i$$

und

$$0f = -3i \text{ u. s. f.}$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

1) Die positive imaginäre Zahl bi wird durch eine Strecke dargestellt, welche der Strecke b gleich und mit der imaginären Einheit $(\overline{0a})$ gleich gerichtet ist; die negative imaginäre Zahl $-bi$ wird durch eine der Strecke bi entgegengesetzt gleiche Strecke dargestellt.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Hypotenuse gefällte Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse."

(In Figur 1 sind die rechtwinkligen Dreiecke durch punktierte Linien dargestellt worden.)

Erkl. 89. Das bei der graphischen Darstellung der reellen und imaginären Zahlen (und auch sonst häufig) zur Anwendung gelangende Linienkreuz (Figur 1) wird nach seinem Erfinder Descartes (geb. 1596, gest. 1650) das „Kartesianische Koordinatensystem", die wagerechte Linie desselben die Abscisse (vom Lateinischen abscindere, abschneiden) und die auf ihr normal stehende Linie die Ordinate (vom Lateinischen ordinare, ordnen) genannt.

Erkl. 89a. Die Abscisse MN wird die reelle, die Ordinate OP die imaginäre Achse genannt. Ferner heisst die Strecke $0N$ die Achse der positiven reellen Zahlen, $0M$ die der negativen reellen Zahlen, $0O$ die Achse der positiven imaginären Zahlen und $0P$ die der negativen imaginären Zahlen.

Erkl. 90. Dass die Linie, welche die imaginären Zahlen versinnbildlicht, normal (perpendikulär) zur Linie der reellen Zahlen gerichtet sein muss, ergibt sich auch aus folgender Ueberlegung. Durch eine Drehung von 180° um den Nullpunkt der Linie MN (Figur 1) gelangt man von $+1$ nach -1 und durch eine nochmalige, gleichgrosse Drehung wieder von -1 zurück nach $+1$. Eine gleiche Wirkung kann man sich durch eine Multiplikation mit (-1) oder mit i^2 (weil $i^2 = -1$ ist) hervorgebracht denken, denn wenn man $+1$ mit i^2 multipliziert, so gelangt man ebenfalls zu -1, und wenn man -1 mit i^2 multipliziert, zu $+1$. Wenn nun eine Multiplikation mit i^2 oder eine zweimalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 180° entspricht, so muss eine einmalige Multiplikation mit i einer Umdrehung von 90° gleichkommen, also $(\pm 1) \cdot i = \pm i$ (d. i. $= \overline{0a}$ oder $= \overline{0d}$) mit $+1$ und -1 (d. i. mit MN) einen Winkel von 90° bilden.

Erkl. 90a. Welche der beiden Richtungen der imaginären Zahlenlinie man als die positive, welche als die negative annehmen will, ist ähnlich wie bei der reellen Zahlenlinie willkürlich.

2) Die reellen und imaginären Einheiten ($+1$, -1, $+i$ und $-i$) sind an Grösse gleich, in der Richtung aber von einander verschieden.

3) Das Zahlengebiet hat zwei Hauptrichtungen, die reelle und die imaginäre (vergl. Erkl. 89a).

4) Die imaginäre Einheit ist das Zeichen der Perpendikularität (vergl. Erkl. 90).

5) Die imaginäre Zahlenlinie ist nur durch ihre Beziehung zur reellen Zahlenlinie imaginär. Wird die Wagerechte als die reelle Zahlenlinie betrachtet, so ist die Senkrechte als die imaginäre Zahlenlinie anzusehen. Stellt die Senkrechte jedoch die reellen Zahlen dar, so liegen auf der Wagerechten die imaginären.

---

b) Ueber die graphische Darstellung der komplexen Zahlen.

Frage 53. Auf welche Weise lässt sich eine komplexe Zahl graphisch (geometrisch) darstellen?

Antwort. Eine jede komplexe Zahl besteht aus zwei Teilen, einem reellen und einem imaginären. Der den reellen Teil der Komplexen darstellende Punkt

Erkl. 91. Die komplexe Zahl $a + bi$ ist abhängig von zwei von einander völlig unab-

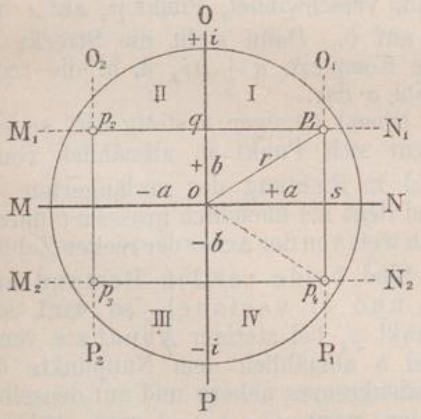
hängigen reellen Zahlen a und b. Daher kann der sie darstellende Punkt nicht in dem Gebiete einer Dimension, d. h. auf einer der beiden Achsen des Linienkreuzes liegen, sondern er muss sich in einem Gebiete von zwei Dimensionen, also in einer Ebene — und zwar in der durch das Linienkreuz bestimmten Zahlenebene — befinden. Es wird also durch die komplexen Zahlen die Zahlenlinie zur Zahlenebene erweitert.

Erkl. 91a. Die Lage eines jeden Punktes der Ebene kann durch eine komplexe Zahl dargestellt werden.

Erkl. 92. Weil sich die Punkte, welche zu den komplexen Zahlen gehören, seitwärts (lateral) vom Linienkreuze befinden, hat Gauss die Komplexen „laterale Zahlen" genannt (vergl. Erkl. 49 a).

Erkl. 93. Dass sich jede Zahl — gleichgültig ob dieselbe reell, rein imaginär oder komplex ist, durch das beschriebene Verfahren graphisch darstellen lässt, findet seine Begründung darin, dass sowohl die Zahlenlinie als auch die Zahlenebene unbegrenzt ist und ihre Punkte stetig aufeinander folgen.

Figur 4.



Erkl. 94. Wird um das Linienkreuz ein Kreis geschlagen (Figur 4), dessen Mittelpunkt sich im Durchschnittspunkte der beiden Achsen befindet, so fällt Punkt p_1 in den ersten, p_2 in den zweiten, p_3 in den dritten und p_4 in den vierten Viertelkreis (Quadranten). Bei gehöriger Länge des Kreishalbmessers werden daher die Punkte aller Komplexen von der Form:

$+a+bi$ im ersten
$-a+bi$ im zweiten
$-a-bi$ im dritten
$+a-bi$ im vierten

Quadranten liegen.

befindet sich auf der Abscisse MN, der Punkt des imaginären Teiles auf der Ordinate OP (Figur 4). Demnach kann der zu der komplexen Zahl gehörende Punkt weder auf der Achse der reellen Zahlen, noch auf der der imaginären liegen. Man hat ihn also ausserhalb des Linienkreuzes zu suchen und findet ihn in dem Schnittpunkte p_1 der beiden in den Endpunkten s und q der Strecken $0s = a$ und $0q = bi$ errichteten Normalen (vergl. Erkl. 91 und 91a).

In gleicher Weise findet man für:

$-a+bi$ den Punkt p_2
$-a-bi$ den Punkt p_3
$+a-bi$ den Punkt p_4 (s. Erkl. 94)

Aus Vorstehendem ergeben sich folgende Sätze:

1) Die komplexe Zahl $a+bi$ wird dargestellt durch den, dem Nullpunkte des Linienkreuzes gegenüberliegenden, vierten Eckpunkt eines Rechteckes, dessen Seiten (Grundlinie und Höhe) von der Abscisse a und der Ordinate b gebildet werden.

2) Die Punkte aller komplexen Zahlen, welche dasselbe reelle Glied $+a$ bezw. $-a$ enthalten, liegen auf der die Achse der reellen Zahlen im Endpunkte von $+a$ bezw. $-a$ rechtwinklig durchschneidenden Geraden O_1P_1 bezw. O_2P_2 (Figur 4).

3) Die Punkte aller komplexen Zahlen, welche denselben reellen Faktor $+b$ bezw. $-b$ des imaginären Gliedes besitzen, liegen auf der die Achse der imaginären Zahlen im Endpunkte von $+b$ bezw. $-b$ rechtwinklig durchschneidenden Geraden M_1N_1 bezw. M_2N_2.

4) Die Punkte zweier konjugierten komplexen Zahlen (z. B. p_1 und p_4 für $a+bi$ und $a-bi$) bilden die Endpunkte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes $(0p_1p_4)$, dessen Höhe gleich der das reelle Glied (a) der beiden Komplexen darstellenden Strecke $(\overline{0s})$ ist.

Frage 54. Welche Veränderungen erleidet die Lage des die komplexe Zahl $a + bi$ darstellenden Punktes p_1 (Figur 4), wenn a oder b allein, oder beide gleichzeitig veränderliche Grössen (vergl. Antwort auf Frage 23) sind?

Erkl. 95. Die in der Antwort auf Frage 24 mitgeteilten Sätze, welche lauten:

1) Eine komplexe Zahl wird zu einer rein imaginären, wenn ihr reelles Glied verschwindet.
2) Eine komplexe Zahl geht in eine reelle über, wenn ihr imaginäres Glied verschwindet.
3) Eine komplexe Zahl wird zu Null, wenn ihr reelles und ihr imaginäres Glied gleichzeitig gleich Null werden.
4) Eine komplexe Zahl wird unendlich gross, wenn eines ihrer reellen Bestandteile (oder beide gleichzeitig) unendlich gross werden —

werden durch die nebenstehenden Ausführungen von neuem bewiesen.

Antwort. Ist nur das reelle Glied a der komplexen Zahl $a + bi$ eine veränderliche Grösse, so wird, wenn a stetig abnimmt, Punkt s allmählich nach 0 und Punkt p_1 allmählich nach q rücken, und wenn a ganz verschwindet, Punkt s auf 0 und Punkt p_1 auf q fallen. Dann stellt die Strecke $\overline{0q}$ die Komplexe $0 + bi$, d. h. die rein imaginäre Zahl bi dar (vergl. Erkl. 95).

Nimmt dagegen a stetig zu, so entfernt sich Punkt p_1 allmählich von q und in Richtung der verlängerten $\overline{p_1 q}$ und befindet sich bei unendlich grossem a unendlich weit von der Achse der imaginären Zahlen.

Ist nur der reelle Faktor b des imaginären Gliedes eine veränderliche Grösse, so bewegt sich bei stetiger Abnahme von b Punkt p_1 allmählich nach s und Punkt q allmählich nach 0, und es fällt, wenn b ganz verschwindet, Punkt p_1 auf s und q auf 0. Dann stellt die Strecke $\overline{0s}$ die Komplexe $a + 0i$, d. h. die reelle Zahl a dar.

Nimmt dagegen b stetig zu, so entfernt sich Punkt p_1 allmählich von s und in Richtung der verlängerten $\overline{sp_1}$ und liegt bei unendlich grossem b unendlich weit von der Achse der reellen Zahlen.

Sind beide reellen Bestandteile (a und b) variabel, so wird sich Punkt p_1 bei stetiger Abnahme von a und b allmählich dem Nullpunkte des Linienkreuzes nähern und auf denselben fallen, wenn $a = b = 0$ wird, während er sich bei stetiger Zunahme von a und b allmählich vom Nullpunkte entfernen und unendlich weit von diesem liegen wird, wenn a und b unendlich gross geworden sind.

Verändern sich a oder b (oder beide) nicht stetig, sondern sprungweise (vergl. Antwort auf Frage 23), so wird sich Punkt p_1 den Achsen (oder dem Nullpunkte) des Linienkreuzes sprungweise nähern, bezw. sich von ihnen entfernen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 55. Wie lässt sich die Entfernung r (Figur 4) des die komplexe Zahl $a+bi$ darstellenden Punktes p_1 vom Nullpunkte des Linienkreuzes berechnen? — Welchen Namen führt diese Strecke? — Wozu kann sie benutzt werden?

Erkl. 96. Der Modulus der komplexen Zahl ist der Radiusvektor des die Komplexe darstellenden Punktes.

Erkl. 96a. Das Wort „Radiusvektor" stammt aus dem Lateinischen und bedeutet so viel als „Richtungslinie".

Antwort. Die Strecke $\overline{0s}$ ist gleich dem reellen Gliede a und die Strecke $\overline{0q}$ (oder $\overline{sp_1}$) gleich dem reellen Faktor des imaginären Gliedes bi der Komplexen $a+bi$, mithin erhält man nach dem pythagoräischen Lehrsatze:

$$r^2 = a^2 + b^2$$

oder:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d. h. den Modulus der Komplexen (vergl. Erkl. 65).

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Die Entfernung des eine komplexe Zahl darstellenden Punktes vom Nullpunkte des Linienkreuzes ist gleich dem Modulus der Komplexen." (Siehe auch Erkl. 96).

Da der Modulus nur die Entfernung zweier Punkte angibt, so muss derselbe stets eine absolute (positive) Zahl sein (vergl. Erkl. 12).

Der Modulus ist gleich Null, wenn Punkt p_1 auf 0 fällt, wenn also $a = 0$ und $b = 0$ ist; er ist gleich a, wenn $b = 0$ ist, und gleich b, wenn a verschwindet; er ist unendlich gross, wenn $a = \infty$ oder $b = \infty$ ist, oder wenn beide gleichzeitig unendlich gross sind.

Hieraus ist schon ersichtlich, dass der Modulus als Maass bei der Vergleichung komplexer Zahlen unter sich benutzt werden kann.

Frage 56. Was versteht man unter einer komplexen Einheit?

Antwort. Unter einer komplexen Einheit versteht man eine komplexe Zahl, deren Modulus gleich Eins ist, deren Punkt also auf der Peripherie eines Kreises liegt, welcher um den Nullpunkt des Linienkreuzes mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschrieben ist.

Das reelle Glied der komplexen Einheit liegt zwischen $+1$ und -1, das imaginäre zwischen $+i$ und $-i$.

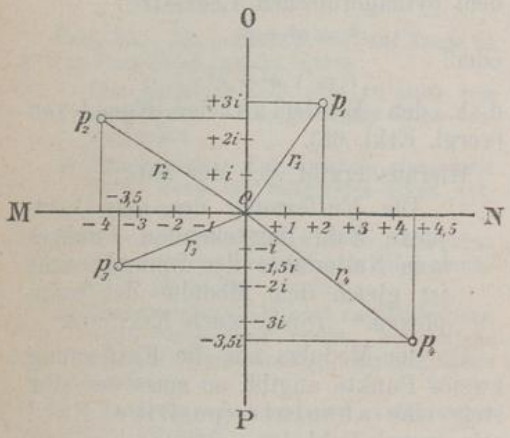
BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 41. Es sind die nachfolgenden Zahlen graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $2+3i$
b) $-4+2{,}5i$
c) $-3{,}5-1{,}5i$
d) $+4{,}5-3{,}5i$

Figur 5.



Auflösungen. (Figur 5.)

a) Der die komplexe Zahl $2+3i$ darstellende Punkt ist der Schnittpunkt p_1 der beiden in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+2)}$ und $\overline{0(+3i)}$ errichteten Normalen. Der Modulus von $2+3i$ ist:

$$r_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}6\cdots$$

b) Der Punkt der Komplexen $-4+2{,}5i$ ist der Schnittpunkt p_2 der beiden Normalen, welche in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(-4)}$ und $\overline{0(+2{,}5i)}$ errichtet werden. Der Modulus dieser Komplexen ist:

$$r_2 = \sqrt{4^2+2{,}5^2} = \sqrt{22{,}25} = 4{,}7\cdots$$

c) Der die komplexe Zahl $-3{,}5-1{,}5i$ darstellende Punkt ist p_3. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_3 = \sqrt{3{,}5^2+1{,}5^2} = \sqrt{14{,}5} = 3{,}8\cdots \text{ Einheiten.}$$

d) Der die komplexe Zahl $+4{,}5-3{,}5i$ darstellende Punkt ist p_4. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_4 = \sqrt{4{,}5^2+3{,}5^2} = \sqrt{32{,}5} = 5{,}7\cdots \text{ Einheiten.}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Nachfolgende komplexe Zahlen sind graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $+0{,}5+1{,}5i$
b) $+1{,}5-2{,}5i$
c) $-3+\sqrt{-9}$
d) $+i\sqrt{-12{,}25}-\sqrt{-12{,}25}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 41.

2) Ueber die trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Frage 57. Wie lässt sich die komplexe Zahl $a+bi$ trigonometrisch darstellen?

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$

und

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \quad \text{(siehe Erkl. 97)}$$