Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

2) Ueber die trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

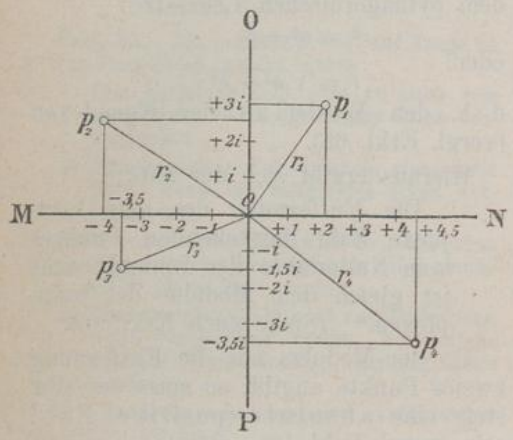
Visual Library

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 41. Es sind die nachfolgenden Zahlen graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $2+3i$
b) $-4+2{,}5i$
c) $-3{,}5-1{,}5i$
d) $+4{,}5-3{,}5i$

Figur 5.



Auflösungen. (Figur 5.)

a) Der die komplexe Zahl $2+3i$ darstellende Punkt ist der Schnittpunkt p_1 der beiden in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+2)}$ und $\overline{0(+3i)}$ errichteten Normalen. Der Modulus von $2+3i$ ist:

$$r_1 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}6\cdots$$

b) Der Punkt der Komplexen $-4+2{,}5i$ ist der Schnittpunkt p_2 der beiden Normalen, welche in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(-4)}$ und $\overline{0(+2{,}5i)}$ errichtet werden. Der Modulus dieser Komplexen ist:

$$r_2 = \sqrt{4^2+2{,}5^2} = \sqrt{22{,}25} = 4{,}7\cdots$$

c) Der die komplexe Zahl $-3{,}5-1{,}5i$ darstellende Punkt ist p_3. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_3 = \sqrt{3{,}5^2+1{,}5^2} = \sqrt{14{,}5} = 3{,}8\cdots \text{ Einheiten.}$$

d) Der die komplexe Zahl $+4{,}5-3{,}5i$ darstellende Punkt ist p_4. Derselbe ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt um:

$$r_4 = \sqrt{4{,}5^2+3{,}5^2} = \sqrt{32{,}5} = 5{,}7\cdots \text{ Einheiten.}$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 42. Nachfolgende komplexe Zahlen sind graphisch darzustellen und ihre Moduln zu berechnen:

a) $+0{,}5+1{,}5i$
b) $+1{,}5-2{,}5i$
c) $-3+\sqrt{-9}$
d) $+i\sqrt{-12{,}25}-\sqrt{-12{,}25}$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 41.

2) Ueber die trigonometrische Darstellung der imaginären und komplexen Zahlen.

Frage 57. Wie lässt sich die komplexe Zahl $a+bi$ trigonometrisch darstellen?

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$

und

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \quad \text{(siehe Erkl. 97)}$$

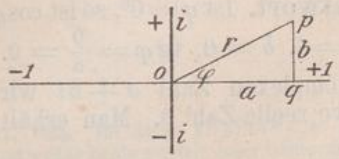
Erkl. 97. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

der Quotient der Gegenkathete b durch die Hypotenuse r der Sinus des Winkels φ,

der Quotient der Nebenkathete a durch die Hypotenuse r der Kosinus des Winkels φ,

der Quotient der Gegenkathete b durch die Nebenkathete a die Tangente des Winkels φ.

Figur 6.



folglich ist:

$$a = r \cdot \cos\varphi$$
$$b = r \cdot \sin\varphi$$

Demnach erhält man für:

$$a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Frage 58. Wie kann man die Grösse des Winkels, welchen der Modulus einer komplexen Zahl mit der Achse der positiven reellen Zahlen einschliesst, berechnen? — Welchen Namen führt dieser Winkel? — Wie wird der allein von ihm abhängige Ausdruck $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ genannt?

Erkl. 98. Ein Winkel lässt sich statt durch Grade auch durch den mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Kreisbogen (lat. arcus) ausdrücken. Da der Umfang eines mit einem Halbmesser gleich der Längeneinheit beschriebenen Kreises gleich 2π ist, so ist der arcus von 360^0 gleich 2π, der von 180^0 gleich π, der von 90^0 gleich $\frac{\pi}{2}$ u. s. w., und man kann z. B. statt $\sin 90^0$ auch schreiben $\sin\frac{\pi}{2}$. Von dieser Schreibweise wird in der höheren Mathematik vielfach Gebrauch gemacht.

Erkl. 98a. Statt $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}$ kann man auch $\varphi = \text{arcus}\left(\text{tangens} = \frac{b}{a}\right)$ oder kürzer: $= \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ schreiben. Man versteht hierunter den Bogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist.

Erkl. 99. Das Wort „Amplitude" stammt vom lateinischen Worte amplitudo, welches „Weite", „Grösse" bedeutet.

Erkl. 100. Werden reelle Zahlen durch Strecken dargestellt, so nennt man letztere gleich, wenn sie nur gleiche Länge haben, ihre Richtung kann eine verschiedene

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke opq (Figur 6) ist:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a} \quad \text{(siehe Erkl. 97)}$$

folglich ist:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} \quad \text{(siehe Erkl. 98 u. 98a)}$$

Dieser Winkel wird die Amplitude der komplexen Zahl genannt (s. Erkl. 99).

Der allein von φ (also allein von der Richtung) abhängige zweigliedrige Ausdruck $\cos\varphi + i\sin\varphi$ heisst der „Richtungskoëffizient" der komplexen Zahl.

Aus dem Bisherigen ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl stellt eine gerade Linie ihrer Länge und Richtung nach dar. Diese Gerade hat die Länge r und schliesst mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel φ ein." (Vgl. Erkl. 100.)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

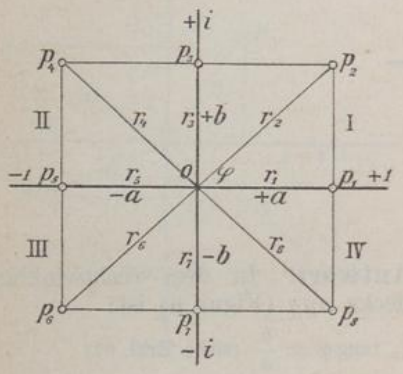
sein. Bei der Darstellung der komplexen Zahlen durch Strecken nennt man letztere gleich und nur dann gleich, wenn sie sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung besitzen.

Frage 59. Was erhält man für:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

wenn man den Winkel φ, sich stetig ändernd, alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt?

Figur 7.



Erkl. 101. Nach der Trigonometrie (Goniometrie) sind die Grenzen von Sinus, Cosinus und Tangens der Winkel von 0^0 bis 360^0 folgende. Es ist:

$$\sin 0^0 = 0 \qquad \cos 0^0 = 1$$
$$\sin 90^0 = 1 \qquad \cos 90^0 = 0$$
$$\sin 180^0 = 0 \qquad \cos 180^0 = -1$$
$$\sin 270^0 = -1 \qquad \cos 270^0 = 0$$
$$\sin 360^0 = 0 \qquad \cos 360^0 = +1$$

$$\operatorname{tg} 0^0 = 0$$
$$\operatorname{tg} 90^0 = +\infty$$
$$\operatorname{tg} 180^0 = 0$$
$$\operatorname{tg} 270^0 = -\infty$$
$$\operatorname{tg} 360^0 = 0$$

Bezüglich der Vorzeichen ergibt sich Folgendes:

Der sinus ist im 1. und 2. Quadranten positiv, im 3. und 4. negativ;

der cosinus ist im 1. und 4. Quadranten positiv, im 2. und 3. negativ;

die tangens ist im 1. und 3. Quadranten positiv, im 2. und 4. negativ.

Für die Berechnung der stumpfen, überstumpfen und überspitzen Winkel benutzt man folgende Beziehungen der Funktionen dieser Winkel mit den Funktionen des spitzen Winkels. Es ist:

Antwort. Ist $\varphi = 0^0$, so ist $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, $b = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{a} = 0$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die positive reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$+a = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Da $+a$ durch die Strecke $0p_1 = r_1$ (Fig. 7) dargestellt wird, so ist $r_1 = +a$.

Ist φ ein spitzer Winkel $\left(\varphi \begin{smallmatrix} > 0^0 \\ < 90^0 \end{smallmatrix}\right)$, so sind sowohl a und b als auch $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ und $\operatorname{tg}\varphi$ positiv und man erhält:

$$+a + bi = r_2 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_2 = r_2 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Figur 7)}$$

Ist $\varphi = 90^0$, so ist $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, $a = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{0} = \infty$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die rein imaginäre Zahl $+bi$. Man erhält also:

$$+bi = r_3 \cdot (\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

Diese positive imaginäre Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_3 = r_3 = b$$

Ist φ ein stumpfer Winkel $\left(\varphi \begin{smallmatrix} > 90^0 \\ < 180^0 \end{smallmatrix}\right)$, so ist $\cos\varphi$ negativ, $\sin\varphi$ positiv (siehe Erkl. 101), a negativ, b positiv, also $\operatorname{tg}\varphi$ negativ und man erhält:

$$-a + bi = r_4 \cdot (-\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_4 = r_4 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(Figur 7)}$$

Ist $\varphi = 180^0$, so ist $\cos\varphi = -1$, $\sin\varphi = 0$, a negativ, $b = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{0}{-a} = 0$. Aus der komplexen Zahl wird die negative reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$-a = r_5 \cdot (\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = +\sin\alpha$$
$$\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = +\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = +\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

Erkl. 102. Ist $\operatorname{tg}\varphi$ positiv, so sind a und b entweder beide positiv oder beide negativ; im ersteren Falle liegt φ im ersten, im letzteren Falle im dritten Quadranten.

Ist $\operatorname{tg}\varphi$ negativ, so ist entweder a negativ und b positiv, oder a positiv und b negativ; im ersteren Falle liegt φ im zweiten, im letzteren Falle im vierten Quadranten.

Diese negative reelle Zahl wird dargestellt durch die Strecke:

$$0p_5 = -a$$

folglich ist $r_5 = a$.

Ist φ ein überstumpfer Winkel $\left(\varphi \begin{smallmatrix} > 180^0 \\ < 270^0 \end{smallmatrix}\right)$, so sind sowohl $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ als auch a und b negativ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}$. Man erhält also:

$$-a - bi = r_6 \cdot (-\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

(vgl. Erkl. 101)

oder:

$$-a - bi = -r_6 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird durch die Strecke:

$$0p_6 = r_6 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dargestellt (Figur 7).

Ist $\varphi = 270^0$, so ist $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, $a = 0$, b negativ, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b}{0} = -\infty$. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die rein imaginäre Zahl $-bi$ und man erhält:

$$-bi = r_7 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

Da diese negative imaginäre Zahl durch die Strecke $0p_7 = r_7$ dargestellt wird, so ist $r_7 = b$.

Ist φ ein überspitzer Winkel $\left(\varphi \begin{smallmatrix} > 270^0 \\ < 360^0 \end{smallmatrix}\right)$, so ist $\cos\varphi$ positiv, $\sin\varphi$ negativ, a positiv, b negativ, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$. Man erhält demnach:

$$a - bi = r_8 (\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Diese komplexe Zahl wird durch die Strecke:

$$0p_8 = r_8 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dargestellt (Figur 7).

Ist $\varphi = 360^0$, so ist $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $b = 0$, a positiv. Aus der komplexen Zahl $a + bi$ wird die positive reelle Zahl a. Man erhält demnach:

$$+a = r_1 \cdot (\cos 360^0 + i\sin 360^0)$$

und es ist $r_1 = \overline{0p_1} = +a$.

Frage 60. Wann besitzen komplexe Zahlen dieselbe oder eine um 180^0 verschiedene Amplitude?

Antwort. Komplexe Zahlen, bei welchen das reelle Glied und der reelle

Erkl. 103. Bei den komplexen Zahlen $+a+bi$ und $-a-bi$ haben a und b dasselbe Verhältnis (denn ist z. B. $a=3$ und $b=4$, so gibt die erstere Komplexe das Verhältnis $\frac{+3}{+4}=+0{,}75$, die letztere das Verhältnis $\frac{-3}{-4}=+0{,}75$), folglich liegen beide Komplexe auf derselben Geraden (nämlich auf $\overline{p_2 0 p_6}$, Figur 7). $(a+bi)$ hat die Amplitude φ, $(-a-bi)$ die Amplitude $(180^0+\varphi)$. Faktor des imaginären Gliedes dasselbe Verhältnis besitzen, haben dieselbe oder eine um 180^0 verschiedene Amplitude.

Solche komplexen Zahlen liegen auf derselben, durch den Nullpunkt des Linienkreuzes gehenden geraden Linie (vergl. Erkl. 103).

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 43. Es sind nachfolgende komplexe Zahlen auf die trigonometrische Form zu bringen:

a) $2+2\sqrt{3}$

b) $+1-\sqrt{-8}$

c) $-2-\sqrt{-5}$

d) $-\sqrt{18}+\sqrt{-7}$

Auflösungen.

a) Der Modulus der Komplexen:

$$2+2\sqrt{-3} \text{ oder } 2+2i\sqrt{3}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=1{,}7321$$

zu 60^0. Demnach ist:

$$2+2i\sqrt{3}=4\cdot(\cos 60^0+i\sin 60^0)$$

Diese komplexe Zahl wird also dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer unter 60^0 zur Achse der positiven reellen Zahlen geneigten Geraden, um vier Längeneinheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt, liegt.

---

b) Der Modulus der Komplexen:

$$+1-\sqrt{-8} \text{ oder } +1-2i\sqrt{2}$$

ist:

$$r=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$$

zu $289^0\,28'\,17''$ (siehe Erkl. 104).

Folglich ist:

$$+1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 289^0\,28'\,17''+i\sin 289^0\,28'\,17'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$=1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 70^0\,31'\,43''-i\sin 70^0\,31'\,43'')$$

---

c) Der Modulus der Komplexen:

$$-2-\sqrt{-5} \text{ oder } -2-i\sqrt{5}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3$$

Erkl. 104. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ (nach Erkl. 102) im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: } 45$$

Differenz für 1 Minute $=26{,}3$. Zum Winkel $70^0\,30'$ kommt also noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\frac{187'}{263} \text{ oder } 1'\,43''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Erkl. 105. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1{,}1180$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}1180 \\ \operatorname{tg} 48^0\,10' &= 1{,}1171 \\ \hline \text{Rest:} &\quad 9 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 6,6. Zum Winkel $48^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{9}{6{,}6} = 1\frac{4'}{11} = 1'\,22''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 + 48^0\,11'\,22'' = 228^0\,11'\,22''$$

Erkl. 106. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -0{,}78968$ ist, so liegt φ im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 0{,}78968 \\ \operatorname{tg} 38^0\,10' &= 0{,}78598 \\ \hline \text{Rest:} &\quad 370 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 47,1. Zum Winkel von $38^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{370}{47{,}1} = 7\frac{403'}{471} = 7'\,51''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 - 38^0\,17'\,51'' = 141^0\,42'\,9''$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1{,}1180$$

zu $228^0\,11'\,22''$ (siehe Erkl. 105).

Folglich ist:

$$-2 - \sqrt{-5} = 3 \cdot (\cos 228^0\,11'\,22'' + i \sin 228^0\,11'\,22'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2 - \sqrt{-5} = -3 \cdot (\cos 48^0\,11'\,22'' + i \sin 48^0\,11'\,22'')$$

---

d) Der Modulus der Komplexen:

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} \text{ oder } -3\sqrt{2} + i\sqrt{7}$$

ist:

$$r = \sqrt{(3 \cdot \sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{25} = 5$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -\sqrt{\frac{2{,}64575}{4{,}24264}} = -\sqrt{0{,}623609} = -0{,}78968$$

zu $141^0\,42'\,9''$ (siehe Erkl. 106).

Folglich ist:

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} = 5 \cdot (\cos 141^0\,42'\,9'' + i \sin 141^0\,42'\,9'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} = 5 \cdot (-\cos 38^0\,17'\,51'' + i \sin 38^0\,17'\,51'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 44. Die nachfolgenden komplexen Zahlen sind trigonometrisch darzustellen:

a) $4 + 3i$

b) $-35 + 23i$

c) $13 - \sqrt{-155}$

d) $-\sqrt{21} - 10i$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, d).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, b).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, c).