Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 103. Bei den komplexen Zahlen $+a+bi$ und $-a-bi$ haben a und b dasselbe Verhältnis (denn ist z. B. $a=3$ und $b=4$, so gibt die erstere Komplexe das Verhältnis $\frac{+3}{+4}=+0{,}75$, die letztere das Verhältnis $\frac{-3}{-4}=+0{,}75$), folglich liegen beide Komplexe auf derselben Geraden (nämlich auf $\overline{p_2 0 p_6}$, Figur 7). $(a+bi)$ hat die Amplitude φ, $(-a-bi)$ die Amplitude $(180^0+\varphi)$. Faktor des imaginären Gliedes dasselbe Verhältnis besitzen, haben dieselbe oder eine um 180^0 verschiedene Amplitude.

Solche komplexen Zahlen liegen auf derselben, durch den Nullpunkt des Linienkreuzes gehenden geraden Linie (vergl. Erkl. 103).

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 43. Es sind nachfolgende komplexe Zahlen auf die trigonometrische Form zu bringen:

a) $2+2\sqrt{3}$

b) $+1-\sqrt{-8}$

c) $-2-\sqrt{-5}$

d) $-\sqrt{18}+\sqrt{-7}$

Auflösungen.

a) Der Modulus der Komplexen:

$$2+2\sqrt{-3} \text{ oder } 2+2i\sqrt{3}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}=1{,}7321$$

zu 60^0. Demnach ist:

$$2+2i\sqrt{3}=4\cdot(\cos 60^0+i\sin 60^0)$$

Diese komplexe Zahl wird also dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer unter 60^0 zur Achse der positiven reellen Zahlen geneigten Geraden, um vier Längeneinheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt, liegt.

---

b) Der Modulus der Komplexen:

$$+1-\sqrt{-8} \text{ oder } +1-2i\sqrt{2}$$

ist:

$$r=\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+8}=\sqrt{9}=3$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$$

zu $289^0\,28'\,17''$ (siehe Erkl. 104).

Folglich ist:

$$+1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 289^0\,28'\,17''+i\sin 289^0\,28'\,17'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$=1-\sqrt{-8}=$$
$$3\cdot(\cos 70^0\,31'\,43''-i\sin 70^0\,31'\,43'')$$

---

c) Der Modulus der Komplexen:

$$-2-\sqrt{-5} \text{ oder } -2-i\sqrt{5}$$

ist:

$$r=\sqrt{2^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{9}=3$$

Erkl. 104. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2\sqrt{2}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ (nach Erkl. 102) im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: } 45$$

Differenz für 1 Minute $=26{,}3$. Zum Winkel $70^0\,30'$ kommt also noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\frac{187'}{263} \text{ oder } 1'\,43''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Erkl. 105. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1{,}1180$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}1180 \\ \operatorname{tg} 48^0\,10' &= 1{,}1171 \\ \hline \text{Rest:} &\quad 9 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 6,6. Zum Winkel $48^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{9}{6{,}6} = 1\frac{4'}{11} = 1'\,22''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 + 48^0\,11'\,22'' = 228^0\,11'\,22''$$

Erkl. 106. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -0{,}78968$ ist, so liegt φ im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 0{,}78968 \\ \operatorname{tg} 38^0\,10' &= 0{,}78598 \\ \hline \text{Rest:} &\quad 370 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 47,1. Zum Winkel von $38^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{370}{47{,}1} = 7\frac{403'}{471} = 7'\,51''$$

Demnach ist:

$$\varphi = 180^0 - 38^0\,17'\,51'' = 141^0\,42'\,9''$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{5}}{-2} = +1{,}1180$$

zu $228^0\,11'\,22''$ (siehe Erkl. 105).

Folglich ist:

$$-2 - \sqrt{-5} = 3 \cdot (\cos 228^0\,11'\,22'' + i \sin 228^0\,11'\,22'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2 - \sqrt{-5} = -3 \cdot (\cos 48^0\,11'\,22'' + i \sin 48^0\,11'\,22'')$$

---

d) Der Modulus der Komplexen:

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} \text{ oder } -3\sqrt{2} + i\sqrt{7}$$

ist:

$$r = \sqrt{(3 \cdot \sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{25} = 5$$

Den Winkel φ findet man aus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{+\sqrt{7}}{-\sqrt{18}} = -\sqrt{\frac{2{,}64575}{4{,}24264}} = -\sqrt{0{,}623609} = -0{,}78968$$

zu $141^0\,42'\,9''$ (siehe Erkl. 106).

Folglich ist:

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} = 5 \cdot (\cos 141^0\,42'\,9'' + i \sin 141^0\,42'\,9'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-\sqrt{18} + \sqrt{-7} = 5 \cdot (-\cos 38^0\,17'\,51'' + i \sin 38^0\,17'\,51'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 44. Die nachfolgenden komplexen Zahlen sind trigonometrisch darzustellen:

a) $4 + 3i$

b) $-35 + 23i$

c) $13 - \sqrt{-155}$

d) $-\sqrt{21} - 10i$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, a).

b) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, d).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, b).

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 43, c).