Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

D. Ueber das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

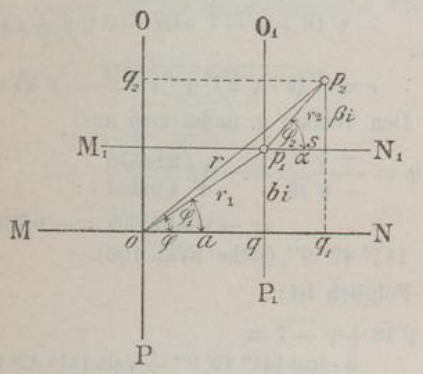
Visual Library

D. Ueber das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen.

1) Ueber das graphische und trigonometrische Addieren und Subtrahieren.

Frage 61. Wie findet man den die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 8.



Erkl. 107. Da:

$$(a+bi)+(\alpha+\beta i)=(a+\alpha)+(b+\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Summe darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 8) vom Nullpunkte aus $(a+\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b+\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q_1 und q_2 dieser Strecken Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 108. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn alle oder einzelne Glieder der zu addierenden Komplexen negativ oder einzelne Summanden reelle oder imaginäre Zahlen sind (siehe die Aufgaben 45 bis 47).

Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den ersten Summanden (z. B. $a+bi$) darstellt (Figur 8), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen, Koordinatensystems (siehe Erkl. 89) und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2 des zweiten Summanden (z. B. $\alpha+\beta i$). Dann stellt dieser Punkt auch die Summe $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$, bezogen auf $MNOP$, dar, denn es ist:

$$oq=a; \qquad qq_1=p_1s=\alpha$$
$$qp_1=q_1s=bi; \qquad sp_2=\beta i$$

also:

$$oq_1=a+\alpha$$

und

$$q_1p_2=bi+\beta i=(b+\beta)i$$

Folglich stellt Punkt p_2 die komplexe Zahl $(a+\alpha)+(b+\beta)i$ dar (bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 26 gleich der Summe von $a+bi$ und $\alpha+\beta i$ (siehe Erkl. 107).

Sind mehr als zwei Summanden gegeben, so ist Punkt p_2 als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden anderen parallelen, Koordinatensystems anzunehmen, in Bezug auf dieses der Punkt p_3 des dritten Summanden zu bestimmen — und so fort.

Frage 62. Wie lässt sich die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Figur 8 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a+\alpha)+(b+\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

folglich ist:

$$(a+bi)+(\alpha+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$= r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 63. In welcher Beziehung steht der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen zur Summe der Moduln der einzelnen Summanden?

Antwort. Der Modulus (Radiusvektor) der Komplexen $a+bi$ ist:

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

der von $\alpha+\beta i$:

$$r_2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

der von $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$:

$$r = \sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2}$$

Liegen die Punkte o, p_1 und p_2 in einer geraden Linie, so ist:

$$r = r_1+r_2$$

liegen sie (wie in Figur 8) nicht in einer geraden Linie, dann ist:

$$r < r_1+r_2 \quad \text{(siehe Erkl. 109)}$$

Demnach erhält man:

$$r \leqq r_1+r_2$$

oder:

$$\sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

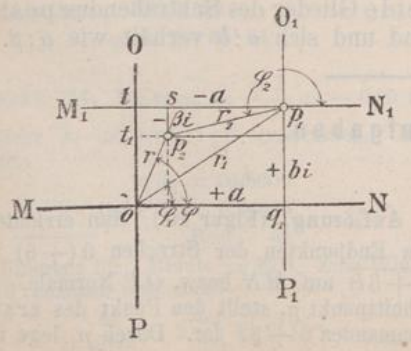
„Der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Summanden."

Erkl. 109. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite."

Frage 64. Wie findet man den die Differenz zweier komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 9.



Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den Minuendus (z. B. $a+bi$) darstellt (Figur 9), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2, welcher das Entgegengesetzte des Subtrahendus — (wenn also letzterer z. B. $\alpha+\beta i$ ist, die komplexe Zahl $-\alpha-\beta i$) — darstellt, so stellt dieser Punkt auch die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)$$

dar, bezogen auf $MNOP$, denn es ist:

$$oq_1 = a; \qquad p_1s = -\alpha$$

Erkl. 110. Da:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Differenz darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 9) vom Nullpunkte aus $(a-\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b-\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q und t_1 dieser Strecken Normale zu den beiden Achsen. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 111. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn der Minuendus oder der Subtrahendus eine reelle oder eine imaginäre Zahl ist (siehe Aufgabe 50).

also:

$$ts=a-\alpha$$

ferner:

$$q_1p_1=+bi; \qquad sp_2=-\beta i$$

also:

$$p_2q=+bi-\beta i=(b-\beta)i$$

Folglich ist p_2 der Punkt der Komplexen:

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

(bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 29 die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i) \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

Frage 65. Wie lässt sich die Differenz zweier komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Frage 9 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

folglich ist:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)-r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 66. Wann ist der Modulus (Radiusvektor) der Differenz zweier komplexen Zahlen gleich der Summe und wann gleich der Differenz der Moduln des Minuendus und Subtrahendus?

Antwort. Es ist:

$$r=r_1+r_2$$

wenn beide Glieder des Subtrahendus negativ sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$ (also $\varphi_1=\varphi_2$ ist).

Es ist:

$$r=r_1-r_2$$

wenn $\varphi_2=180^0+\varphi_1$ ist, wenn also beide Glieder des Subtrahendus positiv sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$.

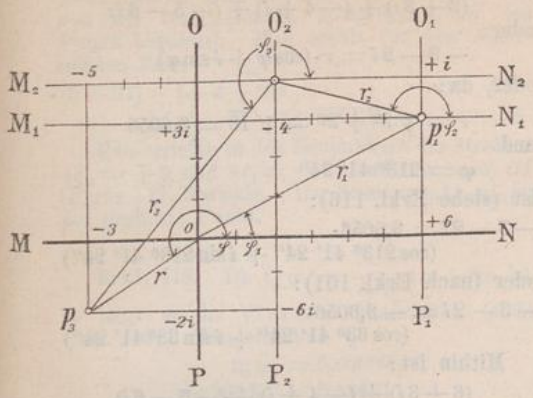
α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 45. Nachfolgende Summe ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

Auflösung. (Figur 10.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+6)}$ und $\overline{0(+3i)}$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt den Punkt des ersten Summanden $6+3i$ dar. Durch p_1 lege man

Figur 10.



Erkl. 112. Besteht die darzustellende Summe aus mehreren Summanden, so empfiehlt es sich, die Summe zu berechnen und dann den Punkt der aus ihr resultierenden Komplexen zu ermitteln. Im vorliegenden Falle gibt:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i) = (6-4-5)+(3+1-6)i$$

(nach der Antwort auf Frage 26)

oder:

$$= -3-2i$$

Man errichte im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-3)}$ auf MN (in Figur 10) und im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-2i)}$ auf OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann die komplexe Zahl $-3-2i$, folglich auch die gegebene Summe dar.

Erkl. 113. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+3}{+6} = +0{,}5$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (s. Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_1 &= +0{,}50000 \\ \operatorname{tg} 26^0\,30' &= +0{,}49858 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 142 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 36,4; folglich sind zu $26^0\,30'$ noch:

$$\frac{142}{36{,}4} = 3\,\frac{82'}{91} = 3'\,54''$$

hinzuzuzählen. Mithin ist:

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

Erkl. 114. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{-4} = -0{,}25$ ist, so liegt φ_2 im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 &= 0{,}25000 \\ \operatorname{tg} 14^0\,0' &= 0{,}24933 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 67 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel $14^0\,0'$ kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

parallel zu $MNOP$ ein neues Linienkreuz $M_1N_1O_1P_1$ so, dass p_1 den Nullpunkt desselben bildet. Hierauf errichte man im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(-4)}$ auf M_1N_1 und im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(+i)}$ auf O_1P_1 Normale; ihr Schnittpunkt stellt den zweiten Summanden $-4+i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)$, bezogen auf $MNOP$, dar. Diesen Punkt wähle man endlich als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden ersten parallelen Linienkreuzes $M_2N_2O_2P_2$ und errichte sowohl im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-5)}$ auf M_2N_2 als auch im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-6i)}$ auf O_2P_2 eine Normale. Der Schnittpunkt p_3 dieser beiden Normalen stellt den dritten Summanden $-5-6i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_2N_2O_2P_2$, oder die Summe $(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $MNOP$, dar (vergl. Erkl. 112).

Trigonometrisch erhält man für:

$$6+3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 6{,}7082$$

und

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

ist (siehe Erkl. 113):

$$6+3i = 6{,}7082\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Ferner ist:

$$-4+i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}1231$$

und

$$\varphi_2 = 165^0\,57'\,50''$$

ist (siehe Erkl. 114):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(\cos 165^0\,57'\,50'' + i\sin 165^0\,57'\,50'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Sodann ist:

$$-5-6i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$

oder, da:

$$r_3 = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102$$

und

$$\varphi_3 = 230^0\,11'\,41''$$

ist (siehe Erkl. 115):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(\cos 230^0\,11'\,41'' + i\sin 230^0\,11'\,41'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(-\cos 50^0\,11'\,41'' - i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

$$= -7{,}8102\cdot(\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 - 14^0\,2'\,10'' = 165^0\,57'\,50''$$

Erkl. 115. Da $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{-6}{-5} = +1{,}2$ ist, so liegt φ_3 im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_3 &= 1{,}2000 \\ \operatorname{tg} 50^0\,10' &= 1{,}1988 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 12 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 7,1. Zum Winkel $50^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{12}{7{,}1} = 1\,\frac{49'}{71} = 1'\,41''$$

Mithin ist:

$$\varphi_3 = 180^0 + 50^0\,11'\,41'' = 230^0\,11'\,41''$$

Erkl. 116. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{-3} = +0{,}66667$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 0{,}66667 \\ \operatorname{tg} 33^0\,40' &= 0{,}66608 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 59 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 42. Zum Winkel $33^0\,40'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{42} = 1\,\frac{17'}{42} = 1'\,24''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 180^0 + 33^0\,41'\,24'' = 213^0\,41'\,24''$$

Endlich ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$-3-2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6056$$

und

$$\varphi = 213^0\,41'\,24''$$

ist (siehe Erkl. 116):

$$-3-2i = 3{,}6056\cdot(\cos 213^0\,41'\,24'' + i\sin 213^0\,41'\,24'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-3-2i = -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Mithin ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$\begin{aligned} -3-2i = {} & 6{,}7082\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'') + 4{,}1231\cdot \\ & (-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'') - 7{,}8102\cdot \\ & (\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'') \end{aligned}$$

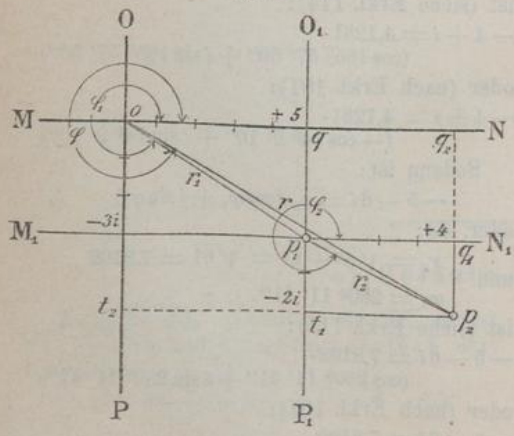
oder:

$$= -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Aufgabe 46. Nachstehende Differenz ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

Figur 11.



Auflösung. (Figur 11.) Man errichte in den Endpunkten $oq = 5$ und $ot = -3i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den Minuendus $5-3i$ dar. Diesen Punkt wähle man als Nullpunkt eines zweiten, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1 N_1 O_1 P_1$ und errichte in den Endpunkten $p_1 q_1 = +4$ und $p_1 t_1 = -2i$ auf $M_1 N_1$ bezw. $O_1 P_1$ Normale. Ihr Schnittpunkt stellt das Entgegengesetzte des Subtrahendus, nämlich:

$$+4-2i \quad [\text{oder: } -(-4+2i)]$$

dar, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1 N_1 O_1 P_1$, oder die Differenz:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

bezogen auf $MNOP$ (vergl. Erkl. 117).

Trigonometrisch erhält man für:

$$5-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} = 5{,}831$$

und

$$\varphi_1 = 329^0\,2'\,10''$$

ist (siehe Erkl. 118):

Erkl. 117. Schneller gelangt man zum Ziel, wenn man die gegebene Differenz berechnet und von der resultierenden komplexen Zahl den Punkt bestimmt. Man erhält für den vorliegenden Fall:

$$(5-3i)-(-4+2i)=$$
$$5-3i+4+2i=+9-5i$$

Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_2=+9$ und $ot_2=-5i$ auf MN bezw. OP (Figur 11) Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 118. Da $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{-3}{+5}=-0{,}6$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}60000 \\ \operatorname{tg}30^0\,50' = 0{,}59691 \\ \hline \text{Rest:}\quad 309 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 39,4. Zum Winkel $30^0\,50''$ kommen also noch:

$$\frac{309}{39{,}4}=7\,\frac{166'}{197}=7'\,50''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1=360^0-30^0\,57'\,50''=329^0\,2'\,10''$$

Erkl. 119. Da $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-2}{+4}=-0{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält für φ_2 (nach Erkl. 113):

$$=360^0-26^0\,33'\,54''=333^0\,26'\,6''$$

Erkl. 120. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-5}{+9}=-0{,}55556$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 0{,}55556 \\ \operatorname{tg}29^0\,0' = 0{,}55431 \\ \hline \text{Rest:}\quad 125 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 38,1. Zum Winkel 29^0 kommen also noch:

$$\frac{125}{38{,}1}=3\,\frac{107'}{381}=3'\,17''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-29^0\,3'\,17''=330^0\,56'\,43''$$

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 329^0\,2'\,10''+i\sin 329^0\,2'\,10'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')$$

Ferner ist:

$$-(-4+2i)$$

oder:

$$+4-2i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=4{,}4721$$

und

$$\varphi_2=333^0\,26'\,6''$$

ist (siehe Erkl. 119):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 333^0\,26'\,6''+i\sin 333^0\,26'\,6'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

Endlich ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}=10{,}295$$

und

$$\varphi=330^0\,56'\,43''$$

ist (siehe Erkl. 120):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 330^0\,56'\,43''+i\sin 330^0\,56'\,43'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

Mithin ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')+4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

oder:

$$=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

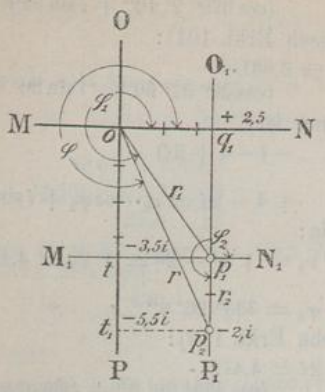
Aufgabe 47. Es ist die Summe:

$$(2{,}5-3{,}5i)+(-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. Man errichte in den Endpunkten $oq=+2{,}5$ und $ot=-3{,}5i$ auf MN bezw. OP (Figur 12) Normale, wähle ihren, den ersten Summanden der gegebenen Summe darstellenden Schnittpunkt als Nullpunkt eines neuen, zu $MNOP$ parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und trage auf O_1P_1 die Strecke $p_1p_2=-2i$ ab, so stellt Punkt p_2 die Summe:

Figur 12.



Erkl. 121. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3,5}{+2,5} = -1,4$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,4000$$
$$\operatorname{tg} 54^0\,20' = 1,3934$$
$$\text{Rest: } 66$$

Differenz für 1 Minute = 8,6. Zum Winkel $54^0\,20'$ kommen also noch:

$$\frac{66}{8,6} = 7\frac{29'}{43} = 7'\,40''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 54^0\,27'\,40'' = 305^0\,32'\,20''$$

Erkl. 122. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5,5}{+2,5} = -2,2$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2,2000$$
$$\operatorname{tg} 65^0\,30' = 2,1943$$
$$\text{Rest: } 57$$

Differenz für 1 Minute = 17. Zum Winkel $65^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{57}{17} = 3\frac{6'}{17} = 3'\,21''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 65^0\,33'\,21'' = 294^0\,26'\,49''$$

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

bezogen auf das Linienkreuz $MNOP$, dar.

Trigonometrisch erhält man für:

$$2,5 - 3,5i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{2,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{18,30} = 4,3$$

und

$$\varphi_1 = 305^0\,32'\,20''$$

ist (nach Erkl. 121):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 305^0\,32'\,20'' + i\sin 305^0\,32'\,20'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'')$$

Ferner ist:

$$-2i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = 2$$

und

$$\varphi_2 = 270^0$$

ist (nach der Antwort auf Frage 59):

$$-2i = 2 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2i = -2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Endlich ist:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{2,5^2 + 5,5^2} = \sqrt{36,50} = 6,0415$$

und

$$\varphi = 294^0\,26'\,49''$$

ist (nach Erkl. 122):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 294^0\,26'\,49'' + i\sin 294^0\,26'\,49'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

Demnach erhält man für:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'') - 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Es ist die Summe:

$$(+2 - 3i) + (-3 + 2i) + (+5 + 3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 45.

Aufgabe 49. Es ist die Differenz:

$$(-4+5i)-(+1-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 46.

Aufgabe 50. Es ist die Differenz:

$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Man berechne zunächst die gegebene Differenz und suche dann von der aus dieser Rechnung resultierenden komplexen Zahl den Punkt auf.

2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren.

Frage 67. Wie lässt sich das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$$

also wiederum eine komplexe Zahl.

Es sei nun $a+bi$ dargestellt durch:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$\alpha+\beta i$ durch:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

und $(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ durch:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Dann ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

(nach Erkl. 36)

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

Nun ist nach Erkl. 123:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Demnach gibt:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Erkl. 123. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Erkl. 124. Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)$$
$$+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$$

Erkl. 124 a. Aus nebenstehender Antwort ergibt sich folgender Satz:

„Das Produkt beliebig vieler komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, der Modulus ist gleich dem Produkte der Moduln und die Amplitude gleich der Summe der Amplituden aller Faktoren."

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man ihre Moduln multipliziert und die Amplituden addiert."

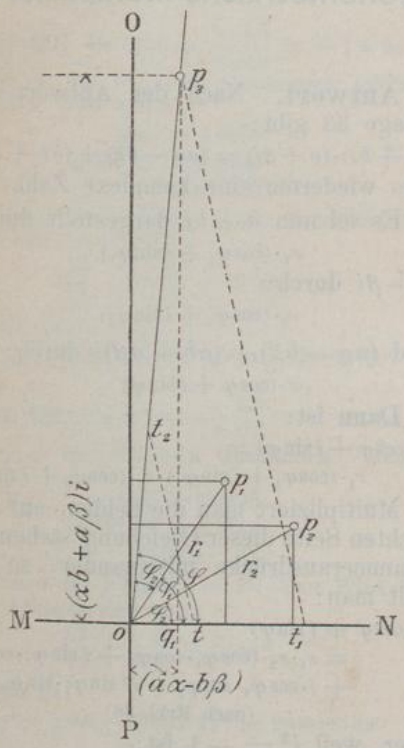
(Vergl. Erkl. 124 a).

Frage 68. Wie findet man in der Zahlenebene den Punkt, welcher das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

darstellt?

Figur 13.



Erkl. 125. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Dreiecke, welche in zwei Paaren gleichliegender Winkel übereinstimmen, sind ähnlich."

In den Dreiecken ott_2 und ot_1p_3 (Fig. 13) ist:

$$\sphericalangle t_2ot = \sphericalangle p_3ot_1 = \varphi$$

ferner:

$$\sphericalangle t_2to = \sphericalangle p_3t_1o$$

weil sie paarweise parallele und gleichgerichtete Schenkel besitzen.

Antwort. (Figur 13). Man ermittele in der durch das Koordinatensystem $MNOP$ bestimmten Zahlenebene die Punkte p_1 und p_2, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf trage man an den Modulus r_1 der Komplexen $a+bi$ den Winkel φ_2, welchen der Modulus r_2 der Komplexen $\alpha+\beta i$ mit der Achse der positiven reellen Zahlen bildet, so an, dass der Winkel φ gleich der Summe der beiden Winkel φ_1 und φ_2 ist; mache ot gleich der angenommenen Längeneinheit, $ot_1 = r_1$ und $ot_2 = r_2$, verbinde t mit t_2 und ziehe durch t_1 zu tt_2 eine Parallele, welche die über t_2 hinaus verlängerte ot_2 in p_3 schneidet. Dann erhält man, weil die beiden Dreiecke ott_2 und ot_1p_3 ähnlich sind (nach Erkl. 125), die Proportion:

$$ot : ot_1 = ot_2 : op_3 \quad \text{(siehe Erkl. 126)}$$

oder:

$$1 : r_1 = r_2 : r$$

d. h.:

$$r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{(nach Erkl. 20a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle\varphi_1 + \sphericalangle\varphi_2 \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf die vorige Frage:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Demnach stellt Punkt p_3 das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

dar. Hieraus folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Produktes komplexer Zahlen bildet

Erkl. 126. In ähnlichen Dreiecken stehen die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, zu einander in demselben Verhältnisse.

Erk. 127. Ein kürzeres Verfahren besteht darin, dass man das gegebene Produkt berechnet und den Punkt ermittelt, welcher die aus der Rechnung resultierende Komplexe darstellt. Da $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ ist, so hat man auf MN (Figur 13) vom Nullpunkte aus $(a\alpha-b\beta)$ Einheiten und auf OP ebenso $(\alpha b+a\beta)$ Einheiten abzutragen und in den Endpunkten q_1 und s_1 dieser Strecken auf MN bezw. OP Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 ist der gesuchte Punkt.

Nach der Antwort auf Frage 37 ist:

$$r=\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$=r_1\cdot r_2$$

Ferner ist:

$$\cos\varphi=\frac{a\alpha-b\beta}{r}=\frac{a\alpha}{r_1\cdot r_2}-\frac{b\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$, $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Endlich ist:

$$\sin\varphi=\frac{\alpha b+a\beta}{r}=\frac{\alpha b}{r_2\cdot r_1}+\frac{a\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$, $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\sin\varphi=\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Punkt p_3 stellt also die komplexe Zahl:

$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

dar, d. h. das Produkt:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Summe der Winkel, welche die Moduln der einzelnen Faktoren mit jener Achse einschliessen, und seine Länge ist gleich dem Produkte der Moduln der einzelnen Faktoren."

Erkl. 128. Verbindet man p_3 (Figur 13) mit p_1 und p_2 mit t, so sind die beiden Dreiecke op_3p_1 und op_2t ähnlich (siehe Erkl. 128a). Denn es ist:

$$op_3=op_1\cdot op_2\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$1\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder, da $1=ot$ ist:

$$ot\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder nach Erkl. 20:

$$ot:op_2=op_1:op_3$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle top_3=\sphericalangle top_2+\sphericalangle top_1\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$\sphericalangle top_3-\sphericalangle top_1=\sphericalangle top_2$$

d. i.:

$$\sphericalangle p_1op_3=\sphericalangle top_2$$

Erkl. 128 a. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen eines Paares von Seiten und in den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen."

Erkl. 129. Während die Lage des die Summe oder Differenz von $a+bi$ und $\alpha+\beta i$ darstellenden Punktes von der als Längeneinheit angenommenen Strecke nicht abhängt, ist der Punkt des Produktes dieser Komplexen von dieser Länge wesentlich abhängig. Denn wird letztere im Verhältnis von $1:u$ (u irgend eine reelle Zahl bedeutend) vergrössert, so nehmen die Moduln (Radienvektoren) von $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$ und von $(a+bi)-(\alpha+\beta i)$ in demselben Verhältnisse zu, während der Modul von $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$ im Verhältnisse $1:u^2$ vergrössert wird.

Frage 69. Wie findet man in der Zahlenebene den das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellenden Punkt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

so ist:

$$a-bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

Man erhält also für:

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_1\cdot(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=r_1^2\cdot(\cos^2\varphi_1+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1-i^2\cdot\sin^2\varphi_1)$$

oder, da sich die Glieder $+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1$ und $-i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1$ fortheben und $i^2=-1$ ist:

$$(a+bi)(a-bi)=r_1^2\cdot(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)$$

Nun ist nach Erkl. 130:

$$\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=+1$$

Folglich gibt:

$$(a+bi)(a-bi)=r_1^2$$

Demnach liegt der das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellende Punkt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und in einer Entfernung von $r_1^2=a^2+b^2$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Erkl. 130. Nach einem Satze der Goniometrie ist die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus eines und desselben Winkels gleich $+1$.

Frage 70. Wie lässt sich das Produkt:

a) zweier reellen Zahlen
b) zweier imaginären Zahlen
c) einer reellen und einer imaginären Zahl

d) einer reellen und einer komplexen Zahl

e) einer imaginären und einer komplexen Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen?

Antwort.

a) Sind beide reellen Faktoren (z. B. a und α) positiv, so ist das Produkt:

$$a \cdot \alpha = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$= r_1 \cdot r_2$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Sind beide reellen Faktoren negativ, so ist das Produkt:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

Demnach liegt der Punkt dieses Produktes auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 360^0 bildet, d. h. auf dieser Achse und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Ist ein Faktor (z. B. a) positiv, der andere (α) negativ, so erhält man:

$$(+a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt hiernach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 180^0 einschliesst, d. h. auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten.

b) Sind beide imaginären Zahlen (z. B. bi und βi) positiv, so ist das Produkt:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der das Produkt $bi \cdot \beta i$ darstellende Punkt liegt hiernach auf der Achse der negativen reellen Zahlen und ist um

$r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt.

Sind beide imaginären Zahlen negativ, so erhält man:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

oder:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot r_2\cdot(\cos 540^0 + i \sin 540^0)$$

oder (nach Erkl. 131):

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Mithin befindet sich der das Produkt $(-bi)\cdot(-\beta i)$ darstellende Punkt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist ein Faktor (z. B. bi) positiv, der andere (βi) negativ, so ist das Produkt:

$$(+bi)\cdot(-\beta i) =$$
$$r_1\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

c) Wird die komplexe Zahl $a + bi$ dargestellt durch $r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und ist die reelle Zahl α positiv, so gibt das Produkt:

$$(a + bi)\cdot(+\alpha) =$$
$$r_1\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\cdot r\cdot(\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

Der das Produkt $(a + bi)\cdot(+\alpha)$ darstellende Punkt liegt also auf dem Modulus von $(a + bi)$ in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus von $(a + bi)$. (Siehe Erkl. 132.)

Ist die reelle Zahl negativ, so erhält man:

$$(a + bi)\cdot(-\alpha) =$$
$$r_1\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(180^0 + \varphi_1) + i \sin(180^0 + \varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus des komplexen Faktors und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

Erkl. 131. Nach einem goniometrischen Satze ist:

$$\sin(360^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(360^0 + \alpha) = \cos \alpha$$
$$\sin(720^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(720^0 + \alpha) = \cos \alpha$$

u. s. w.

Erkl. 132. Aus der nebenstehenden Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer positiven reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus (Radiusvektor) von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \alpha$ vergrössert.

2) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer negativen reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \alpha$ vergrössert und gleichzeitig um 180^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

3) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer positiven imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \beta$ vergrössert und gleichzeitig um 90^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer negativen imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \beta$ vergrössert und gleichzeitig um 270^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

Aus der Antwort auf Frage 67 folgt noch:

5) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer andern komplexen Zahl $\alpha + \beta i$ multipliziert, so wird dadurch der Modulus im Verhältnis von $1 : (\text{Modulus von } \alpha + \beta i)$ vergrössert und gleichzeitig um den Neigungswinkel von $\alpha + \beta i$ nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

d) Ist der imaginäre Faktor βi positiv, so erhält man für:

$$(a+bi)\cdot(+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(90^0+\varphi_1) + i\sin(90^0+\varphi_1)]$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt also auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem β-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

Ist der imaginäre Faktor βi negativ, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(270^0+\varphi_1) + i\sin(270^0+\varphi_1)]$$

Dieses Produkt wird dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden liegt, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Er ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes um $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten entfernt. Der Modulus von $(a+bi)\cdot(-\beta i)$ ist gleich dem β-fachen vom Modulus des komplexen Faktors (siehe Erkl. 132).

α) Gelöste Aufgaben.

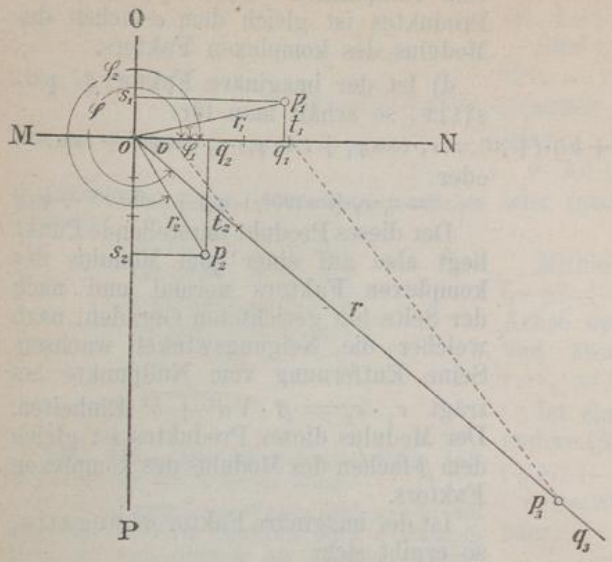
Aufgabe 51. Es ist das Produkt:

$$(4+i)\cdot(2-3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. (Figur 14.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +4$, $os_1 = +i$, $oq_2 = +2$ und $os_2 = -3i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an die Linie $op_1 = r_1$ den Winkel $q_2op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $q_1oq_3 = q_2op_2 + q_1op_1$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = op_1 = r_1$ und $ot_2 = op_2 = r_2$ und verbinde v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit t_2. Endlich ziehe man

Figur 14.



Erkl. 133. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+1}{+4} = +0{,}25$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}25000$$
$$\operatorname{tg} 14^0\,0' = 0{,}24933$$
$$\text{Rest:}\quad 67$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel 14^0 kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

Erkl. 134. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-3}{+2} = -1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest:}\quad 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 360^0 - 56^0\,18'\,37'' = 303^0\,41'\,23'$$

Aufgabe 52. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(3-4i)\cdot(+2)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und dieses Produkt trigonometrisch zu berechnen.

Auflösung. (Figur 15.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +3$ und $os_1 = -4i$ auf MN bezw. OP Normale. durch t_1 eine Parallele zu ot_2 bis zum Schnittpunkte p_3 mit dem Schenkel oq_3 des Winkels $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(4+i)\cdot(2-3i)$ darstellt.

Trigonometrisch erhält man für:

$$4 + i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}123\cdot\cdot$$

und

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

ist (nach Erkl. 133):

$$4 + i = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Ferner ist:

$$2 - 3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 303^0\,41'\,23''$$

ist (nach Erkl. 134):

$$2 - 3i = 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

Mithin erhält man für:

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')\cdot 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

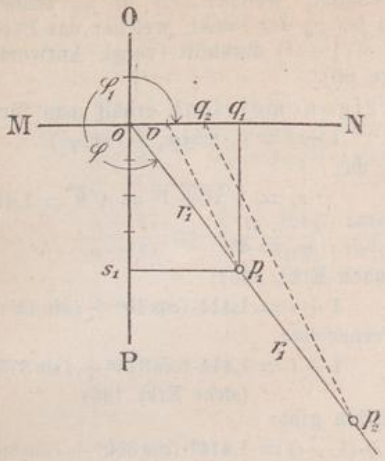
oder (nach Antwort auf Frage 57):

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 14{,}87\cdot(\cos 317^0\,43'\,33'' + i\sin 317^0\,43'\,33'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 14{,}87\cdot(\cos 42^0\,16'\,27'' - i\sin 42^0\,16'\,27'')$$

Figur 15.



Erkl. 135. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-4}{+3} = -1{,}3333\ldots$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1{,}3333$$
$$\operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Zum Winkel 53^0 kommen also noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 53^0\,7'\,47'' = 306^0\,52'\,13''$$

Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den ersten Faktor des gegebenen Produktes dar. Der Punkt des zweiten Faktors $(+2)$ liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist q_2. Der Modulus dieses Faktors oq_2 schliesst mit der Hauptachse einen Winkel von 0^0 ein, daher ist $\varphi = \varphi_1 + 0^0 = \varphi_1$. Man verbinde p_1 mit o und verlängere diese Gerade über p_1 hinaus; man verbinde ferner v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit p_1 und ziehe durch q_2 eine Parallele, welche die verlängerte op_1 in p_2 schneidet. Dann ist p_2 der Punkt, welcher das gegebene Produkt darstellt. Er ist um $2r_1$ Einheiten vom Nullpunkt des Linienkreuzes entfernt [vergl. Erkl. 132, 1)].

Trigonometrisch erhält man für:

$$3 - 4i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und

$$\varphi_1 = 306^0\,52'\,13''$$

ist (nach Erkl. 135):

$$3 - 4i = 5 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

Ferner ist:

$$+2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da $r_2 = 2$ und $\varphi_2 = 0^0$ ist:

$$+2 = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Mithin erhält man für:

$$(3 - 4i)\cdot(+2) =$$
$$10 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

oder (nach Erkl. 101):

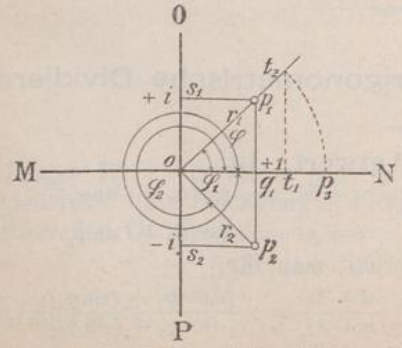
$$= 10 \cdot (\cos 53^0\,7'\,47'' + i\sin 53^0\,7'\,47'')$$

Aufgabe 53. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(1 + i) \text{ und } (1 - i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Figur 16.



Auflösung. (Figur 16.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$, $os_1 = +i$ und $os_2 = -i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an op_1 den Winkel $q_1op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $\varphi = q_1op_1 + q_1op_2$, d. i. $= \varphi_1 + \varphi_2$ wird. Alsdann verlängere man op_1 über p_1 hinaus, trage $op_2 = r_2$ auf oN von o aus ab und ziehe durch den Endpunkt t_1 dieser Strecke eine Parallele zu q_1p_1, welche die verlängerte op_1 in t_2 schneidet. Dann findet statt:

$$op_1 : ot_2 = oq_1 : ot_1$$

oder:

$$r_1 : ot_2 = +1 : r_2$$

d. i.:

$$ot_2 = r_1 \cdot r_2$$

Erkl. 136. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten und man erhält:

$$\varphi_1 = 45^0$$

Der Winkel φ_2 liegt im vierten Quadranten und ist:

$$= 360^0 - 45^0 = 315^0$$

Endlich schlage man mit $o t_2$ um o einen Kreisbogen, welcher $o N$ in p_3 schneidet. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(1+i)(1-i)$ darstellt (vergl. Antwort auf Frage 69).

Trigonometrisch erhält man für:

$$1 + i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_1 = 45^0$$

ist (nach Erkl. 136):

$$1 + i = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Ferner ist:

$$1 - i = 1{,}414 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0)$$

(siehe Erkl. 136)

Mithin gibt:

$$(1+i)\cdot(1-i) = 1{,}414^2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

oder:

$$= 2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

d. i.:

$$= 2$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Es ist das Produkt:

$$(-2-i)\cdot(-3+2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 51.

Aufgabe 55. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(-4+5i)\cdot(-2i)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und das Produkt trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf Frage 70, d) und nach Erkl. 132, 4).

Aufgabe 56. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(-2+5i)\cdot(-2-5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 53.

---

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren.

Frage 71. Wie lässt sich der Quotient:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

und

$$\alpha + \beta i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i \sin\varphi_2)$$

so ergibt sich:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

oder:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}{r_2 \cdot r_2 \cdot (\cos^2\varphi_2 + i\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_2 - i^2 \sin^2\varphi_2)}$$

oder, weil $i^2 = -1$, ferner:

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(nach Erkl. 137)

und

$$\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = +1 \quad \text{(nach Erkl. 130)}$$

ist und sich ferner die Glieder:

$$+i\sin\varphi_2\cos\varphi_2 \text{ und } -i\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

sowie ein Faktor r_2 im Zähler und Nenner fortheben:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Moduln dividiert und die Amplituden subtrahiert."

Erkl. 137. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Frage 72. Wie lässt sich der reciproke Wert von $a+bi$ (siehe Erkl. 15) trigonometrisch darstellen?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}$$

und wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

multipliziert:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}$$

oder:

$$= \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1 \cdot r_1 \cdot (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

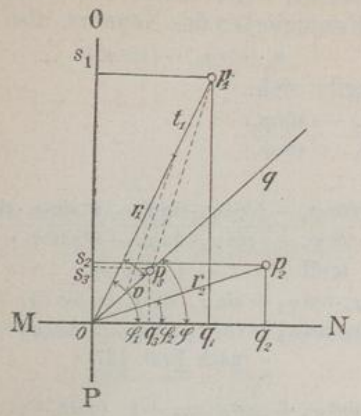
Frage 73. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt?

Antwort. (Fig. 17.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$, $os_1 = +bi$, $oq_2 = +\alpha$ und $os_2 = +\beta i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann die kom-

Figur 17.



Erkl. 138. Ein zweites Verfahren zur Ermittelung des Punktes, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt, besteht darin, dass man den Quotienten berechnet und den Punkt der resultierenden Komplexen in der Zahlenebene aufsucht. Da (nach Antwort auf Frage 38):

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + i \cdot \frac{(a\beta-\alpha b)}{\alpha^2+\beta^2}$$

gibt, so hat man auf der Achse der reellen Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$oq_3 = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

und auf der Achse der imaginären Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$os_3 = \frac{a\beta-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}$$

Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar.

Erkl. 139. Ist die Amplitude des Divisors grösser als die des Dividendus, so gibt $(\varphi_1 - \varphi_2)$ einen negativen Winkel φ. Dann bildet der Modulus des Quotienten mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel $(360^0 - \varphi)$. (Siehe Erkl. 142. Vergl. die Aufgaben 57 und 58.)

Erkl. 140. Die graphische Darstellung der Division komplexer Zahlen besteht nach nebenstehender Antwort also darin, dass der Modulus (Radiusvektor) des Dividendus im Verhältnisse von (Modulus des Divisors) : 1 geändert und gleichzeitig um die Amplitude des Divisors nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

plexen Zahlen $a+bi$ bezw. $\alpha+\beta i$ in der durch das Linienkreuz bestimmten Zahlenebene dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel p_2oq_2 so an, dass Winkel $qoN = p_1oq_1 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = r_2$ und $ov = 1$ (der angenommenen Längeneinheit), verbinde v mit t_1 und ziehe durch p_1 zu t_1v eine Parallele bis zum Schnittpunkte p_3 mit oq.

Dann erhält man (nach Erkl. 126):

$$op_1 : ot_1 = op_3 : ov$$

oder:

$$r_1 : r_2 = op_3 : 1$$

daraus folgt:

$$op_3 = r = \frac{r_1}{r_2} \text{ (nach Erkl. 20a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle\varphi_1 - \sphericalangle\varphi_2 \text{ (nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf Frage 71:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

Demnach stellt Punkt p_3 den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

dar.

Aus dieser Konstruktion ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten des Modulus des Dividendus durch den des Divisors und bildet mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Differenz der Winkel, welche die Moduln des Dividendus und des Divisors mit jener Achse einschliessen."

(Vergl. Erkl. 139.)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 74. Wie lässt sich der Quotient

a) zweier reellen Zahlen

b) einer reellen Zahl durch eine imaginäre Zahl

c) zweier imaginären Zahlen

d) einer imaginären Zahl durch eine reelle Zahl

trigonometrisch ausdrücken und wo liegt in der Zahlenebene der Punkt, welcher diesen Quotienten darstellt?

Erkl. 141. Für die Winkel aller Quadranten findet nach einem Satze der Goniometrie statt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

Erkl. 142. Ist $\sphericalangle \varphi_2 > \sphericalangle \varphi_1$, so ist das zweite Glied des Richtungskoëffizienten (vergl. Antwort auf Frage 58) negativ (s. Erkl. 139).

Erkl. 143. Aus der Antwort auf Frage 74, a) ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier reellen Zahlen $\frac{a}{\alpha}$ ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von a und fällt mit der Achse der reellen Zahlen zusammen."

Antwort.

a) Sind Zähler und Nenner positive reelle Zahlen (z. B. $+a$ und $+\alpha$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Sind Zähler und Nenner negative reelle Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{-\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}{r_2\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Demnach liegt der Punkt des Quotienten $\frac{-a}{-\alpha}$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Ist der Zähler positiv, der Nenner negativ, so folgt:

$$\frac{+a}{-\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)}{r_2\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(0^0 - 180^0) + i\sin(0^0 - 180^0)] \quad \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(-180^0) + i\sin(-180^0)]$$

oder (nach Erkl. 141):

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos 180^0 - i\sin 180^0) \quad \text{(s. Erkl. 142)}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler negativ, der Nenner positiv, so folgt:

$$\frac{-a}{+\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(180^0 - 0^0) + i\sin(180^0 - 0^0)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 143).

b) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl (z. B. $+a$ und $+\beta i$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (0^0 - 90^0) + i \sin (0^0 - 90^0)] \quad \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0) \quad \text{(nach Erkl. 141)}$$

Erkl. 144. Aus der Antwort auf Frage 74, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine imaginäre βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von a und zu letzterem normal gerichtet, d. h. mit der Achse der imaginären Zahlen zusammenfallend."

Demnach liegt der Punkt des Quotienten von $\frac{+a}{+\beta i}$ auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (-270^0) + i \sin (-270^0)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 - i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{-a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{-a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten (vergl. Erkl. 144).

c) Sind Zähler und Nenner positive imaginäre Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Sind Zähler und Nenner negative imaginäre Zahlen, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{+bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 - i \sin 180^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 145. Aus der Antwort auf Frage 74, c) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten zweier imaginären Zahlen $\left(\frac{bi}{\beta i}\right)$ ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und zu letzterem normal gerichtet."

Ist der Zähler eine negative, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vgl. Erkl. 145).

d) Ist der Zähler eine positive imaginäre und der Nenner eine positive reelle Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{+a} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven

imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

Der Punkt von $\frac{+bi}{-\alpha}$ liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine positive reelle Zahl, so folgt:

$$\frac{-bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 146. Aus der Antwort auf Frage 74, d) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine reelle Zahl α ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine negative imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten (vgl. Erkl. 146).

Frage 75. Wie lässt sich der Quotient:

a) einer reellen Zahl durch eine komplexe Zahl
b) einer komplexen Zahl durch eine reelle Zahl
c) einer imaginären Zahl durch eine komplexe Zahl
d) einer komplexen Zahl durch eine imaginäre Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen, wenn die komplexe Zahl nur positive Glieder hat? (Siehe nachfolgende Erklärung.)

Antwort.

a) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl (z. B. $+a$), der Nenner eine komplexe Zahl (z. B. $\alpha + \beta i$), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{+a}{\alpha + \beta i} &= \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) \end{aligned}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Erkl. 147. Es würde zu weit führen, wollten wir hier auch alle die Fälle berücksichtigen, wo ein Glied der komplexen Zahl negativ ist oder es beide Glieder sind. Die trigonometrische und graphische Darstellung solcher Quotienten muss dem Studierenden überlassen bleiben. (Siehe übrigens die Aufgaben 57 und 58.)

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $(360^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Erkl. 139 und 142). Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{\alpha + \beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_2) + i \sin (180^0 - \varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zum Modulus der Komplexen einen Winkel von $(180^0 - \varphi_2)$ bildenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten (vergl. Erkl. 147a).

Erkl. 147a. Aus der Antwort auf Frage 75, a) folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine komplexe Zahl $\alpha + \beta i$ ist im Verhältnisse von 1 : (Modulus von $\alpha + \beta i$) kleiner als der Modulus von a."

b) Ist der Zähler eine komplexe Zahl (z. B. $a + bi$), der Nenner eine positive reelle Zahl (α), so folgt:

$$\frac{a + bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf dem Modulus des Zählers und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 148. Aus der Antwort auf Frage 75, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a + bi$ durch eine reelle Zahl α ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von $a + bi$ und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (\varphi_1 - 180^0) + i \sin (\varphi_1 - 180^0)]$$

oder, da $\varphi_1 < 90^0$ ist (wegen der Annahme, dass die komplexe Zahl nur positive Glieder besitzen soll):

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_1) - i \sin (180^0 - \varphi_1)]$$

Der Punkt von $\frac{a + bi}{-\alpha}$ liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus von $a + bi$ und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 148).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

c) Ist der Zähler eine positive imaginäre Zahl und der Nenner eine komplexe Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos 90^0+i\sin 90^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos 90^0-\varphi_2)+i\sin(90^0-\varphi_2)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(90^0-\varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Erkl. 149. Aus der Antwort auf Frage 75, c) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine komplexe Zahl $\alpha+\beta i$ ist im Verhältnisse von 1 : (Modulus von $\alpha+\beta i$) kleiner als der Modulus von bi."

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{\alpha+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos 270^0+i\sin 270^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0-\varphi_2)+i\sin(270^0-\varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(270^0-\varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar um $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vergl. Erkl. 149).

d) Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{a+bi}{+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_1\cdot(\cos 90^0+i\sin 90^0)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-90^0)+i\sin(\varphi_1-90^0)]$$

oder, da $\varphi_1<90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{+\beta i}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(90^0-\varphi_1)-i\sin(90^0-\varphi_1)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf einer zum Modulus des Zählers normal und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine komplexe Zahl und der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{a+bi}{-\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 270^0+i\sin 270^0)}=\frac{r_1}{r_1}\cdot[\cos(\varphi_1-270^0)+i\sin(\varphi_1-270^0)]$$

oder, da $\varphi_1<90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{-\beta i}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0-\varphi_1)-i\sin(270^0-\varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf einer zum Modulus der Komplexen

Erkl. 150. Aus der Antwort auf Frage 75, d) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a+bi$ durch eine imaginäre Zahl βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von $a+bi$ und zu letzterem normal gerichtet."

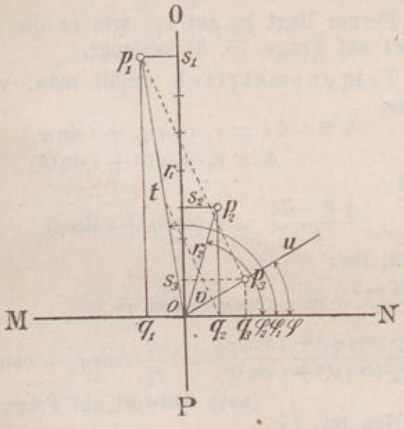
normal stehenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten (vgl. Erkl. 150).

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{-1+7i}{+1+3i}$

Figur 18.



Auflösungen.

a) (Figur 18). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = -1$, $os_1 = +7$, $oq_2 = +1$ und $os_2 = +3$ Normale auf MN bezw. OP. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann den Zähler, bezw. den Nenner des gegebenen Bruches dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel $p_2oq_2 = \varphi_2$ des komplexen Nenners so an, dass Winkel $uoN = p_1oq_2 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot = r_2$ und $ov = oq_2 = 1$, verbinde t mit v und ziehe durch p_1 zu tv eine Parallele bis zum Schnitte mit der Geraden ou. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar (nach Antwort auf Frage 73).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$-1+7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$+1+3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Erkl. 151. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{7}{-1} = -7$ ist, so liegt φ_1 im zweiten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 7{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 81^0\,50' = 6{,}9682$$
$$\text{Rest: } 318$$

Differenz für 1 Minute = 147,2. Zum Winkel $81^0\,50'$ kommen also noch:

$$\frac{318}{147{,}2} = 2\frac{59'}{368} = 2'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 180^0 - 81^0\,52'\,9'' = 98^0\,7'\,51''$$

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = 7{,}071$$
$$r_2 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$
$$\varphi_1 = 98^0\,7'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 151)}$$
$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,54'' \quad \text{(nach Erkl. 152)}$$

Folglich gibt:

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = \frac{7{,}071}{3{,}162}\cdot$$
$$[\cos(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')$$
$$+ i\sin(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')]$$
$$= 2{,}236\cdot(\cos 26^0\,33'\,57'' + i\sin 26^0\,33'\,57'')$$

Demnach ist:

$$r = 2{,}236$$

und

$$\sphericalangle\varphi = 26^0\,33'\,57''$$

---

b) $\frac{+8-7i}{4}$

Erkl. 152. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+3}{+1} = +3$ ist, so liegt φ_2 im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 3{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 71^0\,30' = 2{,}9887$$
$$\text{Rest: } 113$$

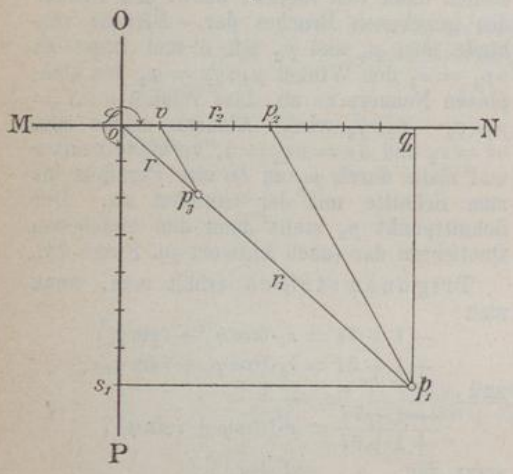
Differenz für 1 Minute = 29,1. Zum Winkel $71^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{113}{29{,}1} = 3\,\frac{257'}{291} = 3'\,53''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,53''$$

Figur 19.



Erkl. 153. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-7}{+8} = -0{,}875$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}87500$$
$$\operatorname{tg} 41^0\,10' = 0{,}87441$$
$$\text{Rest: } 59$$

Differenz für 1 Minute = 51,4. Zum Winkel $41^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{51{,}4} = 1\,\frac{38'}{257} = 1'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 41^0\,11'\,9'' = 318^0\,48'\,51''$$

c) $\frac{2i}{1+i}$

b) (Figur 19). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +8$ und $os_1 = -7i$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Dividendus dar. Der Punkt des Divisors liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen um 4 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_2. Man verbinde p_1 mit p_2 und ziehe durch v (den Endpunkt der Strecke $ov = 1$) zu p_1p_2 eine Parallele bis zum Schnitte mit $op_1 = r_1$. Der Schnittpunkt p_3 ist dann der gesuchte Punkt des gegebenen Quotienten. Denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$ov : op_2 = op_3 : op_1$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

oder:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt p_3 auf r_1, wie es die Antwort auf Frage 75, b) verlangt.

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$+8-7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$4 = r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

und

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 71)

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{8^2+7^2} = \sqrt{113} = 10{,}630$$
$$r_2 = 4$$

und

$$\varphi_1 = 318^0\,48'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 153)}$$

folglich gibt:

$$\frac{+8-7i}{4} = \frac{10{,}630}{4}\cdot$$
$$(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$
$$= 2{,}658\cdot(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 2{,}658\cdot(\cos 41'\,11'\,9'' - i\sin 41^0\,11'\,9'')$$

Demnach ist:

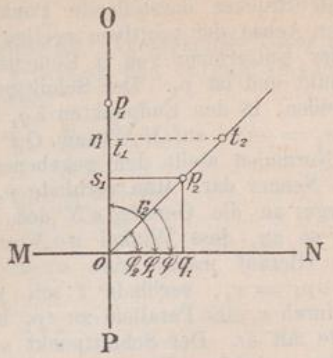
$$r = 2{,}658$$

und

$$\varphi = \varphi_1 = 318^0\,48'\,51''$$

c) (Figur 20). Der den Dividendus darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen in einer Entfernung von 2 Einheiten vom Nullpunkt und ist p_1. Der Schnittpunkt p_2 der beiden, in

Figur 20.



den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Divisor dar. Man verbinde p_2 mit o, lege den Winkel $p_2 o q_1 = \varphi_2$ an $p_1 o$ so an, dass der Winkel $\varphi = 90^0 - \varphi_2$ wird. (Im vorliegenden Beispiele fällt der neue Schenkel des Winkels φ mit dem Schenkel op_2 des Winkels φ_2 zusammen. Es ist demnach $\varphi = \varphi_2$.) Hierauf mache man $ot_1 = r_2$ und $ot_2 = r_1$, verbinde t_1 mit t_2 und ziehe durch s_1 (den Endpunkt der Strecke $os_1 = 1$) eine Parallele bis zum Schnitte mit ot_2. (Im vorliegenden Beispiele fällt diese Parallele mit $s_1 p_2$ zusammen.) Der Schnittpunkt p_2 stellt den Quotienten $\frac{2i}{1+i}$ dar, denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$os_1 : ot_1 = op_2 : ot_2$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt der Punkt des Quotienten auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel $(90^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Antwort auf Frage 75, c).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$2i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$
$$1 + i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(90^0 - \varphi_2) + i \sin(90^0 - \varphi_2)] \Big\} \text{ (nach Antwort auf Frage 71)}$$

Nun ist:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_2 = 45^0 \quad \text{(nach Erkl. 154)}$$

folglich gibt:

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2}{1{,}414} \cdot [\cos(90^0 - 45^0) + i \sin(90^0 - 45^0)]$$

oder:

$$= 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Demnach ist:

$$r = 1{,}414$$

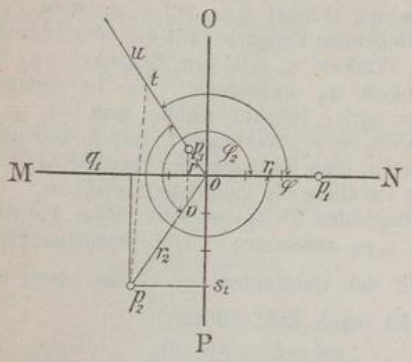
und

$$\varphi = 45^0$$

Erkl. 154. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_2 im ersten Quadranten und ist $= 45^0$.

d) $\dfrac{3}{-2-3i}$

Figur 21.



Erkl. 155. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{-3}{-2} = +1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im dritten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest: } 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 + 56^0\,18'\,37'' = 236^0\,18'\,37''$$

d) (Figur 21). Der den Zähler des gegebenen Bruches darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von 3 Einheiten vom Nullpunkt und ist p_1. Der Schnittpunkt p_2 der beiden, in den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Nenner dar. Man verbinde p_2 mit o und lege an die Gerade oN den Winkel p_1op_2 so an, dass Winkel $uoN = Nop_2$ wird. Hierauf mache man $ov = 1$ und $ot = op_1 = r_1$, verbinde t mit p_2 und ziehe durch v eine Parallele zu tp_2 bis zum Schnitte mit ot. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Bruch dar. Denn nach Erkl. 126 findet statt:

$$ov : op_2 = op_3 : ot$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle 0^0 - \sphericalangle\varphi_2$$

Demnach ist p_3 der Punkt der Komplexen:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(0^0 - \varphi_2) + i\sin(0^0 - \varphi_2)]$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \quad \Big\} \text{ (siehe Antwort auf Frage 75, a)}$$

Trigonometrisch erhält man, da:

$$3 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$
$$-2-3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist, für:

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

Nun ist:

$$r_1 = 3$$
$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 236^0\,18'\,37'' \quad \text{(nach Erkl. 155)}$$

folglich gibt:

$$\frac{3}{-2-3i} = \frac{3}{3{,}606}\cdot(\cos 236^0\,18'\,37'' - i\sin 236^0\,18'\,37'')$$

oder:

$$= 0{,}832\,(-\cos 56^0\,18'\,37'' + i\sin 56^0\,18'\,37'') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$

Demnach ist:

$$r = 0{,}832$$

und es bildet dieser Modulus mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von:

$$180^0 - 56^0\,18'\,37'' = 123^0\,41'\,23''$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 58. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{2+5i}{1-4i}$

b) $\frac{+2+i}{-4i}$

c) $\frac{1}{-3-4i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 57, a).

b) Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf die Fragen 73 und 75, d).

c) Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf die Fragen 72 und 73.

4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren.

Frage 76. Wie lässt sich die Potenz einer komplexen Zahl trigonometrisch darstellen, wenn der Exponent:

a) eine positive,

b) eine negative,

ganze und reelle Zahl ist?

Antwort.

a) Es sei der Potenzexponent n eine positive, ganze und reelle Zahl, und die komplexe Zahl:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann erhält man für:

$$(a+bi)^2 = [r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder (nach Antwort auf Frage 67):

$$= r^2\cdot[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)]$$

d. i.:

$$(a+bi)^2 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Multipliziert man $(a+bi)^2$ mit $(a+bi)$, so ergibt sich:

$$(a+bi)^3 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder:

$$= r^3\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

Erkl. 156. Die zur Berechnung der Potenzen komplexer Zahlen dienende Formel:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

wird nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Moivre, die „Moivresche Formel" und das in ihr liegende Gesetz der „Moivresche Satz" genannt.

Setzt man die Multiplikation mit $(a+bi)$ fort, so erhält man:

$$(a+bi)^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

oder ganz allgemein:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(vergl. Erkl. 156)

b) Ist n eine negative, ganze und reelle Zahl, so hat man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n}$$

oder (nach vorstehender Antwort):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Multipliziert man den Zähler und den Nenner dieses Bruches mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

so erhält man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}$$

oder, wenn man die beiden Klammerausdrücke im Nenner miteinander multipliziert:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot r^n \cdot (\cos^2 n\varphi + i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder gekürzt:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{r^n \cdot (\cos^2 n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder, da:

$$-i^2 = +1$$

und

$$\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = +1$$

ist (nach Erkl. 130):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

Bedenkt man, dass:

$$\cos n\varphi = \cos(-n\varphi)$$
$$-\sin n\varphi = +\sin(-n\varphi)$$

ist (nach Erkl. 141), so kann man auch schreiben:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot [\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]$$

Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird mit einem ganzen und reellen Exponenten potenziert, indem man ihren Modulus potenziert und die Amplitude mit dem Potenzexponenten multipliziert.“ (Vergl. Erkl. 157.)

Erkl. 157. Der Moivresche Satz hat nicht nur für positive, sondern auch, wie aus der Antwort auf Frage 76, b) hervorgeht, für negative, ganze und reelle Potenzexponenten Gültigkeit (siehe auch Erkl. 159).

Frage 77. Welche Beziehungen finden zwischen den gleich hohen Potenzen zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so ist:

$$a - bi = r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$(a+bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi + i r^n \cdot \sin n\varphi$$

und

$$(a-bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi - i r^n \cdot \sin n\varphi$$

Setzt man für:

$$r^n \cdot \cos n\varphi = A$$

und für:

$$r^n \cdot \sin n\varphi = B$$

so erhält man:

$$(a+bi)^n = A+Bi$$

und

$$(a-bi)^n = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Konjugierte komplexe Zahlen, mit derselben reellen Ganzzahl potenziert, geben konjugierte Werte."

Frage 78. Wie lässt sich die Potenz einer rein imaginären Zahl trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach Antwort auf Frage 76 ist:

$$(a+bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Wird $a = o$, so ist:

$$r = b \text{ und } \sphericalangle \varphi = 90^0$$

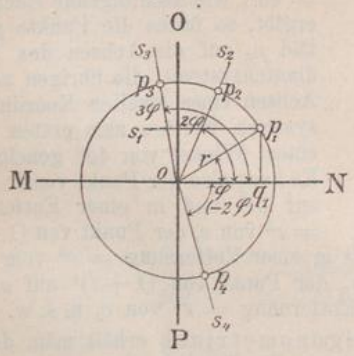
(nach Antwort auf Frage 59)

Demnach erhält man für:

$$(bi)^n = b^n \cdot (\cos n \cdot 90^0 + i \sin n \cdot 90^0)$$

Frage 79. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Potenz einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt, wenn der Exponent eine reelle Ganzzahl ist?

Figur 22.



Erkl. 158. Aus nebenstehender Antwort geht hervor, dass die Potenzierung einer komplexen Zahl gleichbedeutend ist mit der Multiplikation ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Antwort. (Figur 22.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$ und $os_1 = +bi$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt stellt dann die Grundzahl der gegebenen Potenz dar. Hierauf verbinde man p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen Kreisbogen. Alsdann trage man den zum Winkel $p_1 o q_1 = \varphi$ gehörenden Bogen pp_1 von p aus so oft, als der Exponent Einheiten besitzt, und, falls der Exponent positiv ist, nach der Richtung ab, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen; falls er jedoch negativ ist, nach entgegengesetzter Richtung ab.

Dann liegt der Punkt, welcher $(a+bi)^2$ darstellt, auf der Geraden os_2, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel 2φ einschliesst, und zwar in einer Entfernung $= r^2$ vom Nullpunkte. Ist $r = 1$, so ist p_2 der Punkt von $(a+bi)^2$.

Der die Potenz $(a+bi)^{-2}$ darstellende Punkt liegt auf der Geraden os_4, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel (-2φ) einschliesst, und ist vom Nullpunkte um

$\frac{1}{r^2}$ Einheiten entfernt. Ist $r = 1$, so ist p_4 der Punkt dieser Potenz.

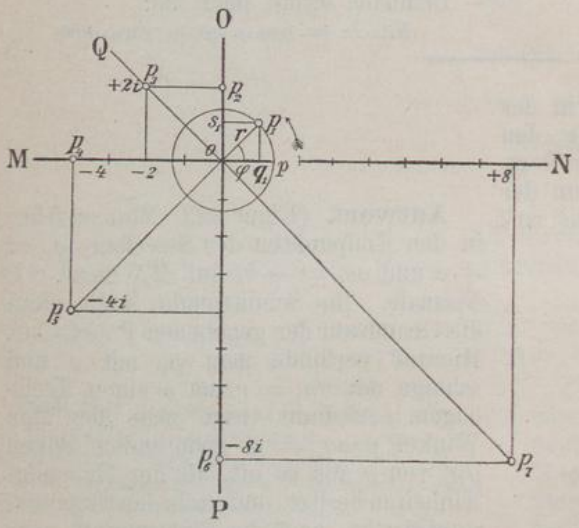
Der Punkt, welcher $(a + bi)^3$ darstellt, befindet sich auf der Geraden os_3 und ist vom Nullpunkte um r^3 Einheiten entfernt. Der Winkel s_3op ist 3φ. Ist $r = 1$, so stellt Punkt p_3 $(a + bi)^3$ dar.

Und so fort.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Es sind die ersten 7 Potenzen von $(1 + i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 23.



Auflösung. (Figur 23.) Die in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen schneiden sich in p_1, welcher Punkt demnach die Grundzahl der Potenz darstellt. — Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis, auf welchem man die Länge des Bogens vom Winkel $p_1op = \varphi$ von p aus 7 mal (oder von p_1 aus 6 mal) nach der Richtung aufzutragen hat, nach welcher die Neigungswinkel wachsen, weil der Potenzexponent positiv ist. Da $\varphi = 45^0$, wie nachfolgende Rechnung ergibt, so fallen die Punkte p_2, p_4 und p_6 auf die Achsen des Koordinatensystems, die übrigen auf die Achsen eines zweiten Koordinatensystems, welches zum ersten unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist. Es liegt also der Punkt von $(1 + i)^2$ auf oO und in einer Entfernung $= r^2$ von o, der Punkt von $(1 + i)^3$ auf oQ in einer Entfernung $= r^3$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(1 + i)^4$ auf oM in einer Entfernung $= r^4$ von o, u. s. w.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi = 45^0$$

weil $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, für:

$(1 + i)^1 = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$, dargestellt durch p_1;

$(1 + i)^2 = 1{,}414^2 \cdot (\cos 2 \cdot 45^0 + i \sin 2 \cdot 45^0)$ (nach Antwort auf Frage 76, a)

$= 2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$, dargestellt durch p_2;

$(1 + i)^3 = 1{,}414^3 \cdot (\cos 3 \cdot 45^0 + i \sin 3 \cdot 45^0)$

$= 2{,}828 \cdot (\cos 135^0 + i \sin 135^0)$, dargestellt durch p_3;

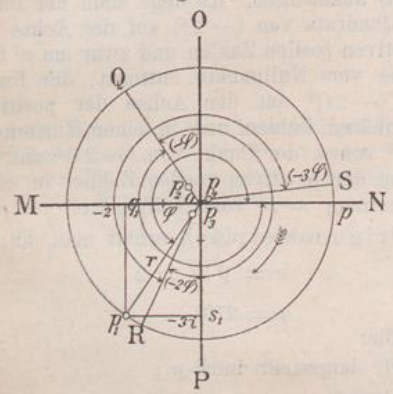
$(1 + i)^4 = 1{,}414^4 \cdot (\cos 4 \cdot 45^0 + i \sin 4 \cdot 45^0)$

$= 4 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$, dargestellt durch p_4;

$$(1+i)^5 = 1{,}414^5 \cdot (\cos 5 \cdot 45^0 + i \sin 5 \cdot 45^0)$$
$$= 5{,}656 \cdot (\cos 225^0 + i \sin 225^0), \text{ dargestellt durch } p_5;$$
$$(1+i)^6 = 1{,}414^6 \cdot (\cos 6 \cdot 45^0 + i \sin 6 \cdot 45^0)$$
$$= 8 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_6;$$
$$(1+i)^7 = 1{,}414^7 \cdot (\cos 7 \cdot 45^0 + i \sin 7 \cdot 45^0)$$
$$= 11{,}312 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0), \text{ dargestellt durch } p_7.$$

Aufgabe 60. Es sind die ersten 3 Potenzen von $(-2-3i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Figur 24.



Auflösung. (Figur 24.) In den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ errichte man auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann $(-2-3i)$ oder $(-2-3i)^{+1}$ dar. Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis. Auf diesem trage man die Länge des Bogens vom Winkel $pop_1 = \varphi$ von p aus nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen (weil der Exponent negativ ist), dreimal ab. Dann ist der Winkel:

$$poQ = -\varphi$$
$$poR = poQ + QoR = -2\varphi$$
und $$poS = poQ + QoR + RoS = -3\varphi$$

Mithin liegt der Punkt von $(-2-3i)^{-1}$ auf der Geraden oQ und zwar in einer Entfernung $= \frac{1}{r}$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(-2-3i)^{-2}$ auf der Geraden oR in einer Entfernung von $\frac{1}{r^2}$ von o und der Punkt von $(-2-3i)^{-3}$ auf oS in einer Entfernung von $\frac{1}{r^3}$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$
und
$$\varphi = 236^0\ 18'\ 37'' \quad \text{(nach Erkl. 159)}$$
ist, für:

$$(-2-3)^{-1} = \frac{1}{3{,}606} \cdot (\cos 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 236^0\ 18'\ 37'') \quad \text{(nach Antwort auf Frage 76, b)}$$
oder: $$= 0{,}277 \cdot (\cos 123^0\ 41'\ 23'' + i \sin 123^0\ 41'\ 23'') \quad \text{(nach Erkl. 139), dargestellt durch } p_2;$$

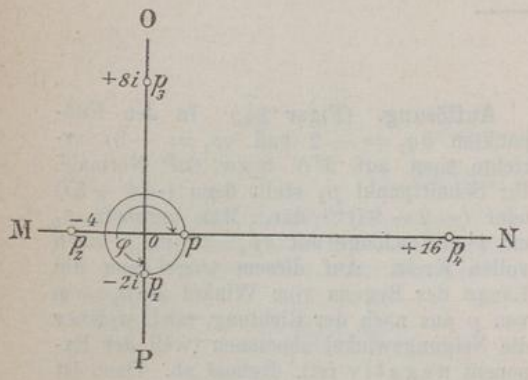
$$(-2-3)^{-2} = \frac{1}{3{,}606^2} \cdot (\cos 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 472^0\ 37'\ 14'' - i \sin 472^0\ 37'\ 14'')$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 112^0\ 37'\ 14'' - i \sin 112^0\ 37'\ 14'') \quad \text{(nach Erkl. 131)}$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 247^0\ 22'\ 46'' + i \sin 247^0\ 22'\ 46''), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2-3)^{-3} = \frac{1}{3{,}606^3} \cdot (\cos 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= 0{,}021 \cdot (\cos 708^0\ 55'\ 51'' - i \sin 708^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 348^0\ 55'\ 51'' - i \sin 348^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 11^0\ 4'\ 9'' + i \sin 11^0\ 4'\ 9''), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Aufgabe 61. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(-2i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 25.



Auflösung. (Figur 25.) Der Punkt, welcher die Grundzahl der gegebenen Potenz darstellt, liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen um 2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_1. Die Amplitude von $-2i$ ist $\varphi = 270^0$. Da der Exponent positiv ist, so ist von p aus auf dem mit dem Radius $op_1 = r$ beschriebenen Kreis nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen, der Bogen des Winkels von 270^0 4mal (oder von p_1 aus 3mal) abzutragen. Es liegt dann der Punkt des Quadrats von $(-2i)$ auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um r^2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt, der Punkt von $(-2i)^3$ auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und in einer Entfernung $= r^3$ von o, der Punkt von $(-2i)^4$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung $= r^4$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2} = 2$$

und

$$\varphi = 270^0$$

ist, für:

$$(-2i)^1 = 2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_1;$$

$$(-2i)^2 = 2^2\cdot(\cos 2\cdot 270^0 + i \sin 2\cdot 270^0)$$
$$= 4\cdot(\cos 540^0 + i \sin 540^0)$$
oder: $$= 4\cdot(\cos 180^0 + i \sin 180^0) \text{ (nach Erkl. 131), dargestellt durch } p_2;$$

$$(-2i)^3 = 2^3\cdot(\cos 3\cdot 270^0 + i \sin 3\cdot 270^0)$$
$$= 8\cdot(\cos 810^0 + i \sin 810^0)$$
oder: $$= 8\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2i)^4 = 2^4\cdot(\cos 4\cdot 270^0 + i \sin 4\cdot 270^0)$$
$$= 16\cdot(\cos 1080^0 + i \sin 1080^0)$$
oder: $$= 16\cdot(\cos 0^0 + i \sin 0^0), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Es sind die ersten 5 Potenzen von $(2-i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 59.

Aufgabe 63. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(+1{,}5i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf Frage 78 und mit Berücksichtigung der Aufgabe 60.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

5) Ueber das trigonometrische und graphische Radizieren.

a) Ueber das trigonometrische Radizieren.

Frage 80. Wie lässt sich die $n$te Wurzel aus einer komplexen Zahl:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach dem Moivreschen Satze (siehe Antwort auf Frage 76 und Erkl. 156) ist:

$$(a+bi)^m = r^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{1}{n}$ statt m ein, so erhält man:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{1}{n}\cdot\varphi\right)$$

Nach Erkl. 43a ist aber:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a+bi)^1} = \sqrt[n]{a+bi}$$

und ebenso:

$$r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^1} = \sqrt[n]{r}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(siehe Frage 82)

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man ihren Modulus (Radiusvektor) radiziert und die Amplitude durch den Wurzelexponenten dividiert.“ (Vgl. Erkl. 160).

Erkl. 159. Wie aus nebenstehender Antwort hervorgeht, ist der Moivresche Satz nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Exponenten gültig.

Erkl. 160. Die Radizierung einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit der Division ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Frage 81. Wie lässt sich:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m}$$

trigonometrisch berechnen?

Antwort. Nach Erkl. 43a ist:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m} = (a+bi)^{\frac{m}{n}}$$

Nach dem Moivreschen Satze gibt aber:

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{m}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{m}{n}\cdot\varphi\right)$$

oder:

$$= \sqrt[n]{r^m} \cdot \left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$$

Erkl. 161. Da $\frac{m}{n}$ eine irrationale Zahl (vergl. Erkl. 13) sein kann, so gilt die Regel für die Potenz einer komplexen Zahl also auch für irrationale Exponenten.

Frage 82. Wie lassen sich sämtliche Werte des Wurzelausdruckes:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

bestimmen?

Antwort. Man kann für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

auch schreiben:

$$\sqrt[n]{(\pm 1)\cdot(a+bi)}$$

oder auch (nach Erkl. 9):

$$\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{(a+bi)}$$

und erhält dann nach der Antwort auf Frage 80:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)} = \sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Da der Modulus eine absolute Zahl ist (vergl. Erkl. 12 und Antwort auf Frage 55), so erhält man für $\sqrt[n]{r}$ nur einen einzigen Wert; ebenso gibt der Richtungskoëffizient:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nur einen Wert. Man wird daher die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

erhalten, wenn man alle Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

ermittelt. Setzt man für:

$$\sqrt[n]{\pm 1} = \varrho\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dann ist:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = (\sqrt[n]{\pm 1})^n = \pm 1$$

oder:

$$\varrho^n\cdot\cos n\alpha + i\varrho^n\cdot\sin n\alpha = \pm 1$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell, folglich muss es auch die linke Seite sein, und es muss also das imaginäre Glied $i\cdot\varrho^n\cdot\sin n\alpha$ verschwinden. Da i nicht gleich Null ist, da ferner auch ϱ^n oder ϱ nicht gleich Null sein kann, weil man sonst für:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 0$$

erhalten würde, während dieses Produkt $+1$ oder -1 sein sollte, so muss $\sin n\alpha$ gleich Null sein. Es muss also (nach Erkl. 162):

$$n\alpha = 0^0,\ 180^0,\ 360^0,\ 540^0,\ 720^0\cdots$$

oder:

$$= 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\cdots$$

sein.

Für die Winkel 0^0, 360^0, $720^0\cdots$, oder 0, 2π, $4\pi\cdots$, oder allgemein $n\alpha = 2k\pi$, wenn k eine beliebige, positive, ganze und reelle Zahl (ein-

Erkl. 162. Der Sinus ist Null bei den Winkeln von 0^0, 180^0, 360^0, 540^0, 720^0 u. s. w. oder, wenn man die Winkel statt durch Grade durch die Längen der mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbögen ausdrückt (vergl. Erkl. 98), bei 0, π, 2π, 3π, 4π, 5π u. s. w.

Erkl. 163. Ist n eine gerade Zahl, so e itzt $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+1$ und -1, weil $(\pm 1)^n$ dann $+1$ ist. Ist n eine ungerade Zahl, so gehört zu $\sqrt[n]{+1}$ der Wert $+1$; lässt sich n durch 4 teilen ohne Rest, so hat $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+i$ und $-i$, weil $(\pm i)^n$ in diesem Falle gleich $+1$ ist (s. Antwort auf Frage 5).

Da:

$$(\sqrt[n]{-1})^{2n} = (\sqrt[n]{(-1)^n})^2 = (-1)^2 \text{ (n. Erkl. 43)} = +1$$

ist, so sind die Werte von $\sqrt[n]{-1}$ unter den Werten von $\sqrt[2n]{+1}$. Da ferner:

$$(\sqrt[n]{\pm i})^{4n} = (\sqrt[n]{(\pm i)^n})^4 = (\pm i)^4 = +1$$

ist, so befinden sich die Werte von $\sqrt[n]{\pm i}$ unter den Werten von $\sqrt[4n]{+1}$.

Erkl. 164. Nach Erkl. 123 ist:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

und $$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

Nun gibt:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} + i^2\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$

oder:

$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cdot\left(\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d. i.:

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder:

$$= \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

In gleicher Weise findet man für:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot$$
$$\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] =$$
$$\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]$$

Erkl. 165. Für $k = x$ und $k = x + n$, worin x irgend welche positive reelle Ganzzahl bedeutet, erhält man statt:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \cos\frac{2x\pi}{n}$$

sodann:

$$= \cos\frac{2(x+n)\pi}{n} = \cos\left(\frac{2x\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \sin\frac{2x\pi}{n}$$

schliesslich 0) bedeutet, ist der Cosinus $= +1$, jedoch $= -1$ bei den Winkeln $180^0, 540^0, 900^0 \cdots$, oder $\pi, 3\pi, 5\pi \cdots$, oder allgemein $n\alpha = (2k+1)\pi$.

Folglich erhält man für:

$$+1 = \varrho^n\cdot(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$$
$$-1 = \varrho^n\cdot[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi]$$

(siehe Erkl. 163)

oder:

$$+1 = \varrho^n(+1+0) = +\varrho^n$$

und $$-1 = \varrho^n(-1+0) = -\varrho^n$$

Hieraus ergibt sich, dass ϱ^n gleich der absoluten Einheit ist.

Demnach gibt:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ferner:

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} =$$
$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot$$
$$\left\{\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

Da k, wie bemerkt, jede beliebige, positive und reelle Ganzzahl sein kann, so scheint es, dass man für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

unendlich viele verschiedene Werte erhalten müsste. Da jedoch (nach Erklärung 131):

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

und $$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

und sodann:

$$= \sin \frac{2\cdot(x+n)\pi}{n} = \sin \frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \cos \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \cos\left(\frac{2x+2n+1}{n}\right)\pi$$

$$= \cos \left[\frac{(2x+1)}{n}\pi + 2\pi\right] = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n};$$

statt:

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \sin \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

also stets das nämliche.

ist, so erhält man aus den beiden Klammerausdrücken:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

für zwei Zahlenwerte von k, welche die Differenz n haben, das gleiche (siehe Erkl. 165). Hiernach können sich für:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

nur n verschiedene Werte ergeben, die man erhält, wenn man für k n aufeinanderfolgende Zahlen, am einfachsten die Zahlen: $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einsetzt.

Frage 83. Welche Werte erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

wenn a eine beliebige reelle Zahl bedeutet?

Antwort. Es lässt sich zunächst:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

zerlegen in die beiden Faktoren:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\pm 1}$$

Da nun (nach voriger Antwort):

$$\sqrt[n]{+1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ist, so gibt:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Hierin sind für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einzusetzen (vergl. Erkl. 166 und 167).

Erkl. 166. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{+a}$ zwei reelle Werte, nämlich $+1$ für $k = 0$ und -1 für $k = \frac{n}{2}$. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{+a}$ nur einen reellen Wert, nämlich $+1$ für $k = 0$. (Siehe die Aufgaben.)

Erkl. 167. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{-a}$ nur komplexe oder rein imaginäre Werte. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{-a}$ einen reellen Wert, nämlich -1 für $k = \frac{n-1}{2}$. (Siehe die Aufgaben.)

Frage 84. Welche Werte erhält man für die $n$te Wurzel aus einer positiven oder negativen, rein imaginären Zahl?

Antwort. Ist der Radikandus eine rein imaginäre Zahl, z. B. ai, so ist die Amplitude:

$$\varphi = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

(nach Antwort auf Frage 59 und Erkl. 98)

Erkl. 168. Man erhält für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi}{2n}$$

$$=\frac{\pi+4k\pi}{2n}=\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{(2k+1)\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi+2\pi}{2n}$$

oder:

$$=\frac{4k\pi+3\pi}{2n}=\frac{(4k+3)\pi}{2n}$$

Mithin erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm ai}=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{90^0}{n}+i\sin\frac{90^0}{n}\right)$$

oder:

$$=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

Da nun:

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so erhält man für:

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

oder:

$$=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

(siehe Erkl. 168).

Erkl. 169. Sämtliche Werte von $\sqrt[n]{\pm ai}$ sind entweder rein imaginär oder komplex. (Siehe die Aufgaben.)

Da ferner:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so ergibt:

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$ (siehe Erkl. 169).

Frage 85. Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln desselben Grades zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

so ist:

$$a-bi=r\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(nach Antwort auf Frage 80)

und

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}-i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Setzt man nun für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\cos\frac{\varphi}{n}=A$$

und für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\sin\frac{\varphi}{n}=B$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

so erhält man:

$$\sqrt[n]{a+bi} = A+Bi$$

und

$$\sqrt[n]{a-bi} = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Zieht man aus zwei konjugierten komplexen Zahlen dieselbe Wurzel, so erhält man konjugierte Werte."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

zu berechnen.

Erkl. 170. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+30}{+16} = +1{,}875$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}8750 \\ \operatorname{tg} 61^0\,50' &= 1{,}8676 \\ \text{Rest:} & \quad 74 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 13,1. Mithin kommen zum Winkel $61^0\,50'$ noch:

$$\frac{74}{13{,}1} = 5\frac{85'}{131} = 5'\,39''$$

Demnach ist $\varphi = 61^0\,55'\,39''$.

Erkl. 171. Man erhält für:

$$\cos 15^0\,20' = 0{,}96440$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 7{,}7 = 69$$

Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Folglich gibt:

$$\begin{aligned} \cos 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}96440 \\ &- \quad 69 \\ &= 0{,}96371 \end{aligned}$$

Erkl. 172. Es gibt:

$$\sin 15^0\,20' = 0{,}26443$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 28{,}1 = 251$$

Letztere ist beim Sinus zu addieren. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}26443 \\ &+ \quad 251 \\ &= 0{,}26694 \end{aligned}$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Beispiel ist:

$$a = 16; \qquad bi = 30i$$

$$r = \sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{1156} = 34$$

$$n = 4; \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3$$

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[4]{34} = \sqrt{5{,}83095} = 2{,}415$$

$$\varphi = 61^0\,55'\,39'' \text{ (nach Erkl. 170)}$$

Folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot(\cos 15^0\,28'\,55'' + i\sin 15^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96371 \text{ (nach Erkl. 171)}$$

und

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \text{ (nach Erkl. 172)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}96371 + 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}327 + 0{,}645\,i \ldots\ldots\ldots x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0 55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{421^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{421^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 105^0 28'\,55'' + i\sin 105^0 28'\,55'')$$

Erkl. 173. Da:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -\cos(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
oder:
$$= -\cos 73^0\,31'\,5''$$
ist, so ergibt sich für:
$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26724 \quad (= -\cos 73^0\,30'')$$
$$-\quad 30 \quad \left(= \text{Diff. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= -0{,}26694$$

Erkl. 174. Es ist:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = \sin(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
$$= \sin 73^0\,31'\,5''$$
Mithin gibt:
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = 0{,}96363 \quad (= \sin 73^0\,30')$$
$$+\quad 8 \quad \left(= \text{Differ. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= 0{,}96371$$

Erkl. 175. Es ist:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -\cos(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\cos 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 171)}$$

Erkl. 176. Es ist:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -\sin(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\sin 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 172)}$$

Erkl. 177. Man erhält für:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = +\cos(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= \cos 74^0\,31'\,5''$$
$$= 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

Erkl. 178. Man erhält für:

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -\sin(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= -\sin 74^0\,31'\,5''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

Erkl. 179. Da:

$$\sqrt[4]{16+30i} = \sqrt{\sqrt{16+30i}}$$
ist (nach Erkl. 8), so lassen sich die verschiedenen Werte von:
$$\sqrt[4]{16+30i}$$
mit Hilfe der Antwort auf Frage 51 berechnen. Man erhält:
$$\sqrt[2]{16+30i} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right) = \pm(5+3i)$$
ferner:
$$\sqrt[2]{+(5+3i)} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}}\right) = \pm(2{,}327+0{,}645i)$$

Nun gibt:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$
und
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = +0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$
folglich ist:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}26694 + 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -0{,}645 + 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{781^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{781^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 195^0\,28'\,55'' + i\sin 195^0\,28'\,54'')$$

Nun erhält man für:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 175)}$$
und für:
$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 176)}$$
folglich gibt:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}96371 - 0{,}26694i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -2{,}327 - 0{,}645i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}414\cdot\left(\cos\frac{1141^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{1141^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 285^0\,28'\,55'' + i\sin 285^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 177)}$$
und
$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 178)}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}26694 - 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 0{,}645 - 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_4$$
(vergl. Erkl. 179 und 180)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

also:

$$x_1 = +2{,}327 + 0{,}645\,i$$
$$x_2 = -2{,}327 - 0{,}645\,i$$

endlich:

$$\sqrt[2]{-(5+3i)} = \sqrt[2]{-5-3i}$$
$$= \pm\left(\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}} - i\cdot\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}}\right)$$
$$= \pm(0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

also:

$$x_3 = +0{,}645 - 2{,}327\,i$$
$$x_4 = -0{,}645 + 2{,}327\,i$$

Demnach erhält man dieselben Werte wie durch nebenstehende Rechnung.

Erkl. 180. Nach einem Satze der Algebra muss die Summe der Wurzeln gleich Null sein. Man erhält für das vorliegende Beispiel:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$$
$$(+2{,}327 + 0{,}645\,i) + (-0{,}645 + 2{,}327\,i) +$$
$$(-2{,}327 - 0{,}645\,i) + (0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

oder:

$$\begin{array}{r} +2{,}327 + 0{,}645\,i \\ -0{,}645 + 2{,}327\,i \\ -2{,}327 - 0{,}645\,i \\ +0{,}645 - 2{,}327\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 65. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zu berechnen.

Erkl. 181. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+4}{+3} = +1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 1{,}3333 \\ \operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270 \\ \hline \text{Rest:}\quad 63 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Mithin kommen zum Winkel 53^0 noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\,\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Es ist also $\varphi = 53^0\,7'\,47''$.

Erkl. 182. Es gibt:

$$\cos 77^0\,40' = 0{,}21360$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6\cdot 28{,}4 = 74$. Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Mithin ist:

$$\begin{array}{r} \cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21360 \\ - \quad 74 \\ \hline = 0{,}21286 \end{array}$$

Auflösung. Da sich:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zerlegen lässt in:

$$\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{3+4i}$$

so erfolgt die Berechnung von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 82 abgeleiteten Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$ (siehe auch Erkl. 188)

Es ist:

$a = 3;\quad b = 4;\quad r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$n = 3;\quad k = 0,\ 1$ und 2

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ (denn $1{,}71^3 = 5$)

$\varphi = 53^0\,7'\,47''$ (nach Erkl. 181)

Erkl. 183. Man erhält für:

$$\sin 77^0\,40' = 0{,}97692$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6 \cdot 6{,}2 = 16$. Letztere ist beim Sinus zu addieren. Demnach gibt:

$$\begin{aligned} \sin 77^0\,42'\,36'' &= 0{,}97692 \\ &+\quad 16 \\ &= 0{,}97708 \end{aligned}$$

Erkl. 184. Da:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -\cos(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\cos 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}95284 \quad (= -\cos 17^0\,40') \\ &\quad -\quad 23 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}95261 \end{aligned}$$

Erkl. 185. Da:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -\sin(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\sin 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}30348 \quad (= -\sin 17^0\,40') \\ &\quad +\quad 72 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}30420 \end{aligned}$$

Erkl. 186. Da:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= +\cos(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= \cos 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= 0{,}74120 \quad (= \cos 42^0\,10') \\ &\quad -\quad 145 \quad (= \text{Diff. für } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= 0{,}73975 \end{aligned}$$

Erkl. 187. Da:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -\sin(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= -\sin 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -0{,}67129 \quad (= -\sin 42^0\,10') \\ &\quad +\quad 159 \quad (= \text{Diff. f. } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= -0{,}67288 \end{aligned}$$

Erkl. 188. Es lassen sich auch die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

nach der anderen Formel der Antwort auf Frage 82, nämlich nach:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

berechnen. Dann erhält man für:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4}{-3} = +1{,}333\cdots$$

also:

$$\varphi = 180^0 + 53^0\,7'\,47'' = 233^0\,7'\,47''$$

Mithin erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i \sin 77^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21286 \quad \text{(nach Erkl. 182)}$$

und

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97708 \quad \text{(nach Erkl. 183)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}21286 + 0{,}97708\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 0{,}364 + 1{,}671\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{593^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{593^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i \sin 197^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

oder, da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95261 \quad \text{(nach Erkl. 184)}$$

und

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30420 \quad \text{(nach Erkl. 185)}$$

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (-0{,}95261 - 0{,}30420\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = -1{,}629 - 0{,}520\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{953^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{953^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i \sin 317^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und für:

$$k = 0.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$
$$= 0{,}364 + 1{,}671\,i$$

$$k = 1.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$
$$= -1{,}629 - 0{,}520\,i$$

$$k = 2.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$
$$= 1{,}265 - 1{,}151\,i$$

oder, da:

$\cos 317^0\,42'\,36'' = +0{,}73975$ (nach Erkl. 186)

und

$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67288$ (nach Erkl. 187)

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}73975 - 0{,}67288\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = +1{,}265 - 1{,}151\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 188 und 189)

Erkl. 189. Nach Erkl. 180 muss:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort oder vorstehender Erklärung:

$$\begin{array}{r} +0{,}364 + 1{,}671\,i \\ -1{,}629 - 0{,}520\,i \\ +1{,}265 - 1{,}151\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 66. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[5]{+32}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 erhält man für:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Im vorliegenden Beispiele ist:

$$a = 32; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{32} = 2$$
$$n = 5; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

Folglich ergibt sich für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2 \cdot (1 + 0) = +2 \;\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2 \cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{2 \cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 72^0 + i\sin 72^0)$$
$$= 2 \cdot (0{,}30902 + i \cdot 0{,}95106)$$
$$= 0{,}61804 + 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{4\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 144^0 + i\sin 144^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 + i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 + i\cdot 0{,}58779)$$
$$= -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{6\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{6\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 216^0 + i\sin 216^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 - i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 - 0{,}58779\,i)$$
$$= -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{8\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{8\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 288^0 + i\sin 288^0)$$
$$= 2\cdot(\cos 72^0 - i\sin 72^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(0{,}30902 - 0{,}95106\,i)$$
$$= 0{,}61804 - 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

(vergl. Erkl. 190)

Erkl. 190. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort:

$$\begin{array}{r} +2 \\ +0{,}61804 + 1{,}90212\,i \\ -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \\ -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \\ +0{,}61804 - 1{,}90212\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 67. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[6]{-729}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 ist:

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a = 729$; $k = 0, 1, 3, 4$ und 5; $n = 6$;

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[6]{729} = 3$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= 2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 3\cdot(0 + i) = 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 210^0 + i\sin 210^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59808 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 3\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

6) $k = 5.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= +2{,}59809 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_6$$
(vergl. Erkl. 191)

Erkl. 191. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ +3{,}0\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -3\,i \\ +2{,}59809 - 1{,}5\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 68. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{216\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{+a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$a = 216; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[3]{216} = 6$$
$$n = 3; \qquad k = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 6\cdot(0{,}86603 + i\cdot 0{,}5)$$
$$= 5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 6\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= -5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 192. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +5{,}19618 + 3i \\ -5{,}19618 + 3i \\ -6i \\ \hline = 0 \end{array}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{216\,i} &= 6\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right) \\ &= 6\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0) \\ &= 6\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -6i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 192)

Aufgabe 69. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{-16\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{-a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$

Im gegebenen Wurzelausdruck ist:

$$a = 16; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3; \qquad n = 4$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 67^0\,30' + i\sin 67^0\,30') \\ &= 2\cdot(0{,}38268 + 0{,}92388\,i) \\ &= 0{,}76536 + 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\; x_1 \end{aligned}$$

Erkl. 193. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

sein. Die nebenstehende Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} +0{,}76536 + 1{,}84776\,i \\ -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \\ -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \\ +1{,}84776 - 0{,}76536\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

2) $k = 1.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 157^0\,30' + i\sin 157^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 22^0\,30' + i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 2\cdot(-0{,}92388 + 0{,}38268\,i) \\ &= -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 \end{aligned}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 247^0\,30' + i\sin 247^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 67^0\,30' - i\sin 67^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

4) $k = 3.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{15\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{15\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 337^0\,30' + i\sin 337^0\,30') \\ &= 2\cdot(\cos 22^0\,30' - i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}84776 - 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_4 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 193)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von nachfolgenden Wurzelausdrücken sind die verschiedenen Werte zu berechnen:

a) $\sqrt[3]{35-23i}$

b) $\sqrt[4]{-15+\sqrt{-31}}$

c) $\sqrt[4]{+625}$

d) $\sqrt[5]{-243}$

e) $\sqrt[3]{+27i}$

f) $\sqrt{-81i}$

Andeutungen.

a) Die Auflösung hat nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

zu erfolgen.

b) Die Auflösung kann nach vorstehender Formel oder nach der Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]+i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

erfolgen; im ersteren Falle ist für $\operatorname{tg}\varphi=\frac{+\sqrt{31}}{-15}$, im letzteren $=\frac{-\sqrt{31}}{+15}$ zu setzen (siehe Aufgabe 65 und Erkl. 188).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 66.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 67.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 68.

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 69.

---

b) Ueber das graphische Radizieren.

Anmerkung 10. Da sich die graphische Darstellung von Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht ohne Berechnung einzelner Teile der Wurzeln ausführen lässt, so begnügen wir uns hier mit der graphischen Darstellung der Quadratwurzeln.

Frage 86. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt?

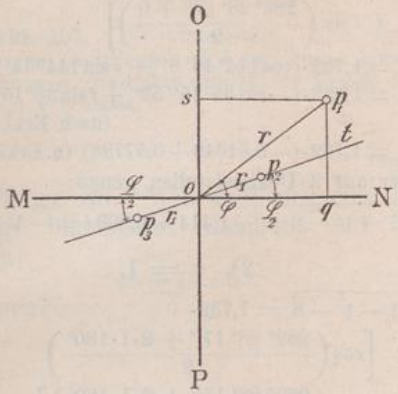
Antwort. (Fig. 26.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq=+a$ und $os=+bi$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Radikandus dar.

Man verbinde p_1 mit o, halbiere den Winkel $p_1oq=\varphi$, weil:

$$\sqrt[2]{a+bi}=\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist (nach Antwort auf Frage 80), und trage von o aus auf dieser Halbierungslinie das Stück $\sqrt[2]{r}$ oder, da $r=\sqrt[2]{a^2+b^2}$ ist, das Stück $\sqrt[2]{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $\sqrt[4]{a^2+b^2}$

Figur 26.



(nach Erkl. 8) ab. Der Endpunkt p_2 dieser Strecke stellt dann $\sqrt{a+bi}$ dar.

Da jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, so muss es noch einen zweiten Punkt geben, welcher $\sqrt{a+bi}$ darstellt. Dieser Punkt (p_3) liegt auf der Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels φ und ist ebenfalls um das Stück $\sqrt{r}$ vom Nullpunkte entfernt.

Beweis. Die zu p_3 gehörende komplexe Zahl ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left[\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

oder, da:

$$\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\quad\text{(n. Erkl. 101)}$$

ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder:

$$-\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

d. i. das Entgegengesetzte von:

$$+\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Summe beider Werte gibt 0, wie es der Satz in Erkl. 180 verlangt.

α) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 71. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}}$$

zu berechnen und graphisch darzustellen.

Erkl. 194. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{8}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: }\ 45$$

Differenz für 1 Minute = 26,3. Mithin kommt zum Winkel 70° 30′ noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\,\frac{187'}{263}=1'\,43''$$

Demnach ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Auflösung. (Figur 27.) Nach Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$n=2;\quad a=1;\quad b=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{1^2+(\sqrt{8})^2}}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=1{,}732\cdots$$

$$k=0\text{ und }1;\quad\varphi=289^0\,28'\,17''\quad\text{(n. Erkl. 194)}$$

Erkl. 195. Man erhält für:

$$\begin{aligned}\cos 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}81748 \quad (= \cos 35^0\,10') \\ &\quad - \quad 99 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}81649 \\ \sin 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}57596 \quad (= \sin 35^0\,10') \\ &\quad + \quad 140 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}57736\end{aligned}$$

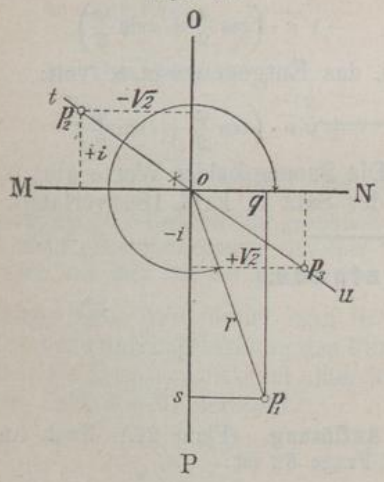
Erkl. 196. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 = 0$$

sein. Aus nebenstehender Rechnung folgt:

$$\begin{array}{r} -\sqrt{2} + i \\ +\sqrt{2} - i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Figur 27.



folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 144^0\,44'\,8'' + i \sin 144^0\,44'\,8'') \\ &= 1{,}732 \cdot (-\cos 35^0\,15''\,52'' + i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (-0{,}81649 + 0{,}57736) \quad \text{(n. Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = -1{,}414 + 0{,}999\,i = -\sqrt{2} + i$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \\ &\quad \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot \left(\cos \frac{649^0\,28'\,17''}{2} + i \sin \frac{649^0\,28'\,17''}{2}\right) \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 324^0\,44'\,8'' + i \sin 324^0\,44'\,8'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 131)} \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 35^0\,15'\,52'' - i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (0{,}81649 - 0{,}57736) \quad \text{(nach Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}414 - 0{,}999\,i = \sqrt{2} - i$$

(vergl. Erkl. 196)

Die diese beiden Werte in der Zahlenebene darstellenden Punkte findet man auf folgende Weise:

Man errichtet in den Endpunkten der Strecken $oq = +1$ und $os = -\sqrt{-8} = -2{,}828\,i$ auf MN bezw. OP Normale, verbinde ihren Schnittpunkt p_1 mit o, halbiere den Winkel qop_1 und trage auf tu von o nach beiden Seiten hin die Strecke:

$$r_1 = \sqrt{r} = 1{,}732$$

ab; die Endpunkte p_2 und p_3 sind die gesuchten Punkte von:

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{-8}}$$

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 72. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt[2]{3+4i}$$

rechnerisch und graphisch zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 71.

c) Ueber die Auflösung der binomischen Gleichungen.

Frage 87. Was versteht man unter einer binomischen Gleichung?

Erkl. 197. Die binomischen (d. h. zweigliedrigen) Gleichungen sind sog. reine höhere Gleichungen, weil ihre unbekannte Grösse nur einmal vorkommt.

Antwort. Unter einer binomischen Gleichung versteht man eine Gleichung von der Form:

$$y^n \pm a = 0$$

in welcher a irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Frage 88. Wie lässt sich eine beliebige binomische Gleichung auf die Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

bringen?

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$y^n \pm a = 0$$

für $y^n = ax^n$ oder für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ ein, so erhält man:

$$y^n \pm a = ax^n \pm a = 0$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch a, so ergibt sich:

$$\frac{ax^n}{a} \pm \frac{a}{a} = 0$$

oder:

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{(nach Erkl. 19)}$$

Auf diese Form kann man jede binomische Gleichung bringen, sobald man für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ einsetzt.

Die Auflösung binomischer Gleichungen besteht also vorzugsweise in der Aufsuchung der verschiedenen Wurzelwerte der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$.

Frage 89. Wie findet man die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^n \pm 1 = 0?$$

Erkl. 198. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Jede Gleichung hat ebensoviele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten besitzt."

Hiernach besitzt die Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ n verschiedene Wurzeln.

Antwort. Aus $x^n \pm 1 = 0$ folgt:

$$x^n = \mp 1$$

und

$$x = \sqrt[n]{\mp 1}$$

Demnach sind die Wurzeln der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ dieselben wie die Werte der $n$ten Wurzeln aus der negativen bezw. positiven Einheit.

Nach der Antwort auf Frage 82 war:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Aus der ersten Formel erhält man sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n - 1 = 0$$

aus der zweiten Formel sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

wenn man in diese Formeln für k nacheinander die Werte:

$$0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$$

einsetzt.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Es sind die verschiedenen Wurzeln der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$
d) $x^5 + 1 = 0$

Erkl. 199. Aus der Lehre von den höheren Gleichungen ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied das Minuszeichen führt, hat mindestens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. [Vergl. die Aufgaben 73, a) und c)].
2) Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Wurzel, welche das entgegengesetzte Vorzeichen des letzten Gliedes führt. [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
3) Besitzt eine Gleichung mit reellen Koëffizienten eine Wurzel von der Form $a + bi$, so ist $a - bi$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung. (Es kommen hiernach die komplexen Wurzeln stets in gerader Anzahl vor.) [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
4) Die reellen Wurzeln einer Gleichung kommen stets in gerader Anzahl vor, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, jedoch in ungerader Anzahl, wenn der höchste Exponent der Unbekannten eine ungerade Zahl ist. (Vergl. nebenstehende Aufgabe.)

Auflösungen.

a) Man findet die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ aus der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

wenn man für $n = 2$ und für k die Werte 0 und 1 einsetzt. Man erhält alsdann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

(Probe: $x_1 + x_2 = +1 - 1 = 0$; s. Erkl. 180.)

---

b) Die 3 Wurzeln der Gleichung $x^3 + 1 = 0$ findet man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

wenn man in dieselbe für $n = 3$ und für k nacheinander die Werte 0, 1 und 2 einsetzt. Dann ergibt sich für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 60^0 + i\sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 300^0 + i\sin 300^0 = \cos 60^0 - i\sin 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = 0$.)

c) Die Berechnung der 4 Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ geschieht mittels der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

in welche man für $n = 4$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2 und 3 einzusetzen hat. Dann erhält man für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} = \cos 90^0 + i\sin 90^0 = +i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} = \cos 180^0 + i\sin 180^0$$
$$= -1 + 0i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} = \cos 270^0 + i\sin 270^0 = -i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +1 + i - 1 - i = 0$.)

d) Die Gleichung $x^5 + 1$ hat 5 Wurzeln, welche man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

findet, wenn man in dieselbe für $n = 5$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzt. Man erhält dann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 36^0 + i\sin 36^0 = 0{,}80902 + 0{,}58779\,i$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 108^0 + i\sin 108^0 = -\cos 72^0 + i\sin 72^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 + 0{,}95106\,i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0\cdot i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0 \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 - 0{,}95106\,i$$

5) $k = 4$.

$$x_5 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0$$
$$= 0{,}80902 - 0{,}58779\,i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = +0{,}80902 + 0{,}58779\,i - 0{,}30902 + 0{,}95106\,i - 1 - 0{,}30902 - 0{,}95106\,i + 0{,}80902 - 0{,}58779\,i = 0$; vergl. Erkl. 180.)

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 74. Es sind die verschiedenen Werte der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^5 - 1 = 0$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 73, a) bis d).

E. Ueber die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Anmerkung 11. Zum Verständnis dieses Teiles unseres Lehrbuches sind diejenigen Kenntnisse der Goniometrie und der Logarithmenrechnung erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Goniometrie und der Logarithmen von Dr. A. Kleyer erworben werden können.

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Frage 90. Auf welche Weise lässt sich $\cos^n\varphi$ durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Setzt man für:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und für:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a + b = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

und demnach:

$$2^n\cos^n\varphi = (a+b)^n$$