Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

1) Ueber das graphische und trigonometrische Addieren und Subtrahieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

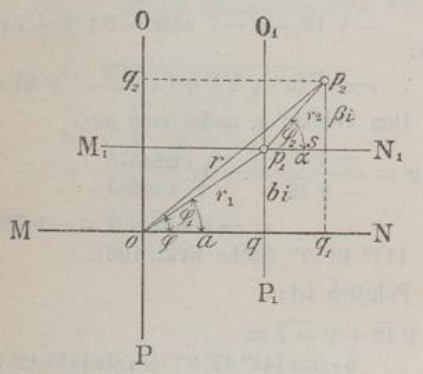
Visual Library

D. Ueber das graphische und trigonometrische Rechnen mit imaginären und komplexen Zahlen.

1) Ueber das graphische und trigonometrische Addieren und Subtrahieren.

Frage 61. Wie findet man den die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 8.



Erkl. 107. Da:

$$(a+bi)+(\alpha+\beta i)=(a+\alpha)+(b+\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Summe darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 8) vom Nullpunkte aus $(a+\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b+\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q_1 und q_2 dieser Strecken Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 108. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn alle oder einzelne Glieder der zu addierenden Komplexen negativ oder einzelne Summanden reelle oder imaginäre Zahlen sind (siehe die Aufgaben 45 bis 47).

Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den ersten Summanden (z. B. $a+bi$) darstellt (Figur 8), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen, Koordinatensystems (siehe Erkl. 89) und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2 des zweiten Summanden (z. B. $\alpha+\beta i$). Dann stellt dieser Punkt auch die Summe $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$, bezogen auf $MNOP$, dar, denn es ist:

$$oq=a; \qquad qq_1=p_1s=\alpha$$
$$qp_1=q_1s=bi; \qquad sp_2=\beta i$$

also:

$$oq_1=a+\alpha$$

und

$$q_1p_2=bi+\beta i=(b+\beta)i$$

Folglich stellt Punkt p_2 die komplexe Zahl $(a+\alpha)+(b+\beta)i$ dar (bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 26 gleich der Summe von $a+bi$ und $\alpha+\beta i$ (siehe Erkl. 107).

Sind mehr als zwei Summanden gegeben, so ist Punkt p_2 als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden anderen parallelen, Koordinatensystems anzunehmen, in Bezug auf dieses der Punkt p_3 des dritten Summanden zu bestimmen — und so fort.

Frage 62. Wie lässt sich die Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Figur 8 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a+\alpha)+(b+\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

folglich ist:

$$(a+bi)+(\alpha+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)+r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$= r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 63. In welcher Beziehung steht der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen zur Summe der Moduln der einzelnen Summanden?

Antwort. Der Modulus (Radiusvektor) der Komplexen $a+bi$ ist:

$$r_1 = \sqrt{a^2+b^2}$$

der von $\alpha+\beta i$:

$$r_2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

der von $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$:

$$r = \sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2}$$

Liegen die Punkte o, p_1 und p_2 in einer geraden Linie, so ist:

$$r = r_1+r_2$$

liegen sie (wie in Figur 8) nicht in einer geraden Linie, dann ist:

$$r < r_1+r_2 \quad \text{(siehe Erkl. 109)}$$

Demnach erhält man:

$$r \leqq r_1+r_2$$

oder:

$$\sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2} \leqq \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Hieraus folgt der Satz:

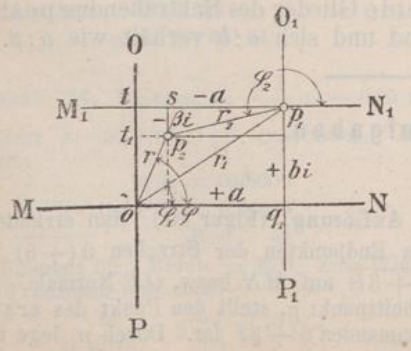
„Der Modulus (Radiusvektor) der Summe zweier (oder mehrerer) komplexen Zahlen ist kleiner oder höchstens gleich der Summe der Moduln der einzelnen Summanden."

Erkl. 109. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte Seite."

Frage 64. Wie findet man den die Differenz zweier komplexen Zahlen darstellenden Punkt der Zahlenebene?

Figur 9.



Antwort. Man bestimme zunächst den Punkt p_1, welcher den Minuendus (z. B. $a+bi$) darstellt (Figur 9), wähle hierauf diesen Punkt als Nullpunkt eines neuen, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und ermittele in der durch dieses Linienkreuz bestimmten Zahlenebene den Punkt p_2, welcher das Entgegengesetzte des Subtrahendus — (wenn also letzterer z. B. $\alpha+\beta i$ ist, die komplexe Zahl $-\alpha-\beta i$) — darstellt, so stellt dieser Punkt auch die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)$$

dar, bezogen auf $MNOP$, denn es ist:

$$oq_1 = a; \qquad p_1s = -\alpha$$

Erkl. 110. Da:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Differenz darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 9) vom Nullpunkte aus $(a-\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b-\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q und t_1 dieser Strecken Normale zu den beiden Achsen. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 111. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn der Minuendus oder der Subtrahendus eine reelle oder eine imaginäre Zahl ist (siehe Aufgabe 50).

also:

$$ts=a-\alpha$$

ferner:

$$q_1p_1=+bi; \qquad sp_2=-\beta i$$

also:

$$p_2q=+bi-\beta i=(b-\beta)i$$

Folglich ist p_2 der Punkt der Komplexen:

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

(bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 29 die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i) \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

Frage 65. Wie lässt sich die Differenz zweier komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Frage 9 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

folglich ist:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)-r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 66. Wann ist der Modulus (Radiusvektor) der Differenz zweier komplexen Zahlen gleich der Summe und wann gleich der Differenz der Moduln des Minuendus und Subtrahendus?

Antwort. Es ist:

$$r=r_1+r_2$$

wenn beide Glieder des Subtrahendus negativ sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$ (also $\varphi_1=\varphi_2$ ist).

Es ist:

$$r=r_1-r_2$$

wenn $\varphi_2=180^0+\varphi_1$ ist, wenn also beide Glieder des Subtrahendus positiv sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$.

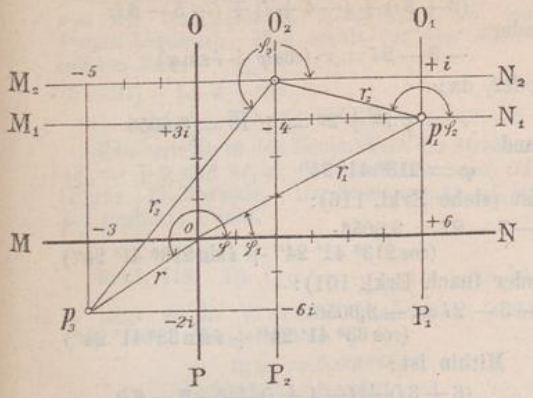
α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 45. Nachfolgende Summe ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

Auflösung. (Figur 10.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+6)}$ und $\overline{0(+3i)}$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt den Punkt des ersten Summanden $6+3i$ dar. Durch p_1 lege man

Figur 10.



Erkl. 112. Besteht die darzustellende Summe aus mehreren Summanden, so empfiehlt es sich, die Summe zu berechnen und dann den Punkt der aus ihr resultierenden Komplexen zu ermitteln. Im vorliegenden Falle gibt:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i) = (6-4-5)+(3+1-6)i$$

(nach der Antwort auf Frage 26)

oder:

$$= -3-2i$$

Man errichte im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-3)}$ auf MN (in Figur 10) und im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-2i)}$ auf OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann die komplexe Zahl $-3-2i$, folglich auch die gegebene Summe dar.

Erkl. 113. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+3}{+6} = +0{,}5$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (s. Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_1 &= +0{,}50000 \\ \operatorname{tg} 26^0\,30' &= +0{,}49858 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 142 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 36,4; folglich sind zu $26^0\,30'$ noch:

$$\frac{142}{36{,}4} = 3\,\frac{82'}{91} = 3'\,54''$$

hinzuzuzählen. Mithin ist:

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

Erkl. 114. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{-4} = -0{,}25$ ist, so liegt φ_2 im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 &= 0{,}25000 \\ \operatorname{tg} 14^0\,0' &= 0{,}24933 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 67 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel $14^0\,0'$ kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

parallel zu $MNOP$ ein neues Linienkreuz $M_1N_1O_1P_1$ so, dass p_1 den Nullpunkt desselben bildet. Hierauf errichte man im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(-4)}$ auf M_1N_1 und im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(+i)}$ auf O_1P_1 Normale; ihr Schnittpunkt stellt den zweiten Summanden $-4+i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)$, bezogen auf $MNOP$, dar. Diesen Punkt wähle man endlich als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden ersten parallelen Linienkreuzes $M_2N_2O_2P_2$ und errichte sowohl im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-5)}$ auf M_2N_2 als auch im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-6i)}$ auf O_2P_2 eine Normale. Der Schnittpunkt p_3 dieser beiden Normalen stellt den dritten Summanden $-5-6i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_2N_2O_2P_2$, oder die Summe $(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $MNOP$, dar (vergl. Erkl. 112).

Trigonometrisch erhält man für:

$$6+3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 6{,}7082$$

und

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

ist (siehe Erkl. 113):

$$6+3i = 6{,}7082\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Ferner ist:

$$-4+i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}1231$$

und

$$\varphi_2 = 165^0\,57'\,50''$$

ist (siehe Erkl. 114):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(\cos 165^0\,57'\,50'' + i\sin 165^0\,57'\,50'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Sodann ist:

$$-5-6i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$

oder, da:

$$r_3 = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102$$

und

$$\varphi_3 = 230^0\,11'\,41''$$

ist (siehe Erkl. 115):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(\cos 230^0\,11'\,41'' + i\sin 230^0\,11'\,41'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(-\cos 50^0\,11'\,41'' - i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

$$= -7{,}8102\cdot(\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 - 14^0\,2'\,10'' = 165^0\,57'\,50''$$

Erkl. 115. Da $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{-6}{-5} = +1{,}2$ ist, so liegt φ_3 im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_3 &= 1{,}2000 \\ \operatorname{tg} 50^0\,10' &= 1{,}1988 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 12 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 7,1. Zum Winkel $50^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{12}{7{,}1} = 1\,\frac{49'}{71} = 1'\,41''$$

Mithin ist:

$$\varphi_3 = 180^0 + 50^0\,11'\,41'' = 230^0\,11'\,41''$$

Erkl. 116. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{-3} = +0{,}66667$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 0{,}66667 \\ \operatorname{tg} 33^0\,40' &= 0{,}66608 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 59 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 42. Zum Winkel $33^0\,40'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{42} = 1\,\frac{17'}{42} = 1'\,24''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 180^0 + 33^0\,41'\,24'' = 213^0\,41'\,24''$$

Endlich ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$-3-2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6056$$

und

$$\varphi = 213^0\,41'\,24''$$

ist (siehe Erkl. 116):

$$-3-2i = 3{,}6056\cdot(\cos 213^0\,41'\,24'' + i\sin 213^0\,41'\,24'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-3-2i = -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Mithin ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$\begin{aligned} -3-2i = {} & 6{,}7082\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'') + 4{,}1231\cdot \\ & (-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'') - 7{,}8102\cdot \\ & (\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'') \end{aligned}$$

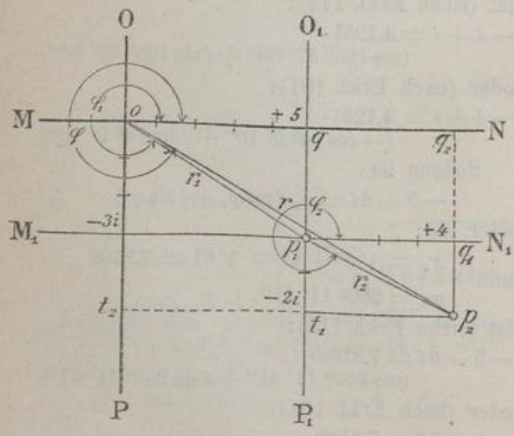
oder:

$$= -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Aufgabe 46. Nachstehende Differenz ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

Figur 11.



Auflösung. (Figur 11.) Man errichte in den Endpunkten $oq = 5$ und $ot = -3i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den Minuendus $5-3i$ dar. Diesen Punkt wähle man als Nullpunkt eines zweiten, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1 N_1 O_1 P_1$ und errichte in den Endpunkten $p_1 q_1 = +4$ und $p_1 t_1 = -2i$ auf $M_1 N_1$ bezw. $O_1 P_1$ Normale. Ihr Schnittpunkt stellt das Entgegengesetzte des Subtrahendus, nämlich:

$$+4-2i \quad [\text{oder: } -(-4+2i)]$$

dar, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1 N_1 O_1 P_1$, oder die Differenz:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

bezogen auf $MNOP$ (vergl. Erkl. 117).

Trigonometrisch erhält man für:

$$5-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} = 5{,}831$$

und

$$\varphi_1 = 329^0\,2'\,10''$$

ist (siehe Erkl. 118):

Erkl. 117. Schneller gelangt man zum Ziel, wenn man die gegebene Differenz berechnet und von der resultierenden komplexen Zahl den Punkt bestimmt. Man erhält für den vorliegenden Fall:

$$(5-3i)-(-4+2i)=$$
$$5-3i+4+2i=+9-5i$$

Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_2=+9$ und $ot_2=-5i$ auf MN bezw. OP (Figur 11) Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 118. Da $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{-3}{+5}=-0{,}6$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}60000 \\ \operatorname{tg}30^0\,50' = 0{,}59691 \\ \hline \text{Rest:}\quad 309 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 39,4. Zum Winkel $30^0\,50''$ kommen also noch:

$$\frac{309}{39{,}4}=7\,\frac{166'}{197}=7'\,50''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1=360^0-30^0\,57'\,50''=329^0\,2'\,10''$$

Erkl. 119. Da $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-2}{+4}=-0{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält für φ_2 (nach Erkl. 113):

$$=360^0-26^0\,33'\,54''=333^0\,26'\,6''$$

Erkl. 120. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-5}{+9}=-0{,}55556$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 0{,}55556 \\ \operatorname{tg}29^0\,0' = 0{,}55431 \\ \hline \text{Rest:}\quad 125 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 38,1. Zum Winkel 29^0 kommen also noch:

$$\frac{125}{38{,}1}=3\,\frac{107'}{381}=3'\,17''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-29^0\,3'\,17''=330^0\,56'\,43''$$

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 329^0\,2'\,10''+i\sin 329^0\,2'\,10'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')$$

Ferner ist:

$$-(-4+2i)$$

oder:

$$+4-2i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=4{,}4721$$

und

$$\varphi_2=333^0\,26'\,6''$$

ist (siehe Erkl. 119):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 333^0\,26'\,6''+i\sin 333^0\,26'\,6'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

Endlich ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}=10{,}295$$

und

$$\varphi=330^0\,56'\,43''$$

ist (siehe Erkl. 120):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 330^0\,56'\,43''+i\sin 330^0\,56'\,43'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

Mithin ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')+4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

oder:

$$=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

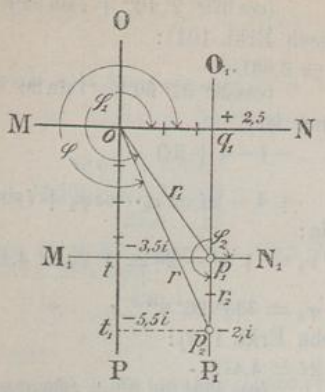
Aufgabe 47. Es ist die Summe:

$$(2{,}5-3{,}5i)+(-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. Man errichte in den Endpunkten $oq=+2{,}5$ und $ot=-3{,}5i$ auf MN bezw. OP (Figur 12) Normale, wähle ihren, den ersten Summanden der gegebenen Summe darstellenden Schnittpunkt als Nullpunkt eines neuen, zu $MNOP$ parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und trage auf O_1P_1 die Strecke $p_1p_2=-2i$ ab, so stellt Punkt p_2 die Summe:

Figur 12.



Erkl. 121. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3,5}{+2,5} = -1,4$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,4000$$
$$\operatorname{tg} 54^0\,20' = 1,3934$$
$$\text{Rest: } 66$$

Differenz für 1 Minute = 8,6. Zum Winkel $54^0\,20'$ kommen also noch:

$$\frac{66}{8,6} = 7\frac{29'}{43} = 7'\,40''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 54^0\,27'\,40'' = 305^0\,32'\,20''$$

Erkl. 122. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5,5}{+2,5} = -2,2$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2,2000$$
$$\operatorname{tg} 65^0\,30' = 2,1943$$
$$\text{Rest: } 57$$

Differenz für 1 Minute = 17. Zum Winkel $65^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{57}{17} = 3\frac{6'}{17} = 3'\,21''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 65^0\,33'\,21'' = 294^0\,26'\,49''$$

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

bezogen auf das Linienkreuz $MNOP$, dar.

Trigonometrisch erhält man für:

$$2,5 - 3,5i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{2,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{18,30} = 4,3$$

und

$$\varphi_1 = 305^0\,32'\,20''$$

ist (nach Erkl. 121):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 305^0\,32'\,20'' + i\sin 305^0\,32'\,20'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'')$$

Ferner ist:

$$-2i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = 2$$

und

$$\varphi_2 = 270^0$$

ist (nach der Antwort auf Frage 59):

$$-2i = 2 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2i = -2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Endlich ist:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{2,5^2 + 5,5^2} = \sqrt{36,50} = 6,0415$$

und

$$\varphi = 294^0\,26'\,49''$$

ist (nach Erkl. 122):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 294^0\,26'\,49'' + i\sin 294^0\,26'\,49'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

Demnach erhält man für:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'') - 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Es ist die Summe:

$$(+2 - 3i) + (-3 + 2i) + (+5 + 3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 45.

Aufgabe 49. Es ist die Differenz:

$$(-4+5i)-(+1-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 46.

Aufgabe 50. Es ist die Differenz:

$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Man berechne zunächst die gegebene Differenz und suche dann von der aus dieser Rechnung resultierenden komplexen Zahl den Punkt auf.

2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren.

Frage 67. Wie lässt sich das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$$

also wiederum eine komplexe Zahl.

Es sei nun $a+bi$ dargestellt durch:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$\alpha+\beta i$ durch:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

und $(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ durch:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Dann ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

(nach Erkl. 36)

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

Nun ist nach Erkl. 123:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Demnach gibt:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Erkl. 123. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Erkl. 124. Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)$$
$$+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$$