Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 110. Da:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

ist, so kann man auch auf folgende Weise und schneller den diese Differenz darstellenden Punkt ermitteln. Man trage auf der Achse der reellen Zahlen MN (in Figur 9) vom Nullpunkte aus $(a-\alpha)$ Einheiten und auf der Achse der imaginären Zahlen OP ebenso $(b-\beta)$ Einheiten ab und errichte in den Endpunkten q und t_1 dieser Strecken Normale zu den beiden Achsen. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 111. Das in vorstehender Erklärung, bezw. in nebenstehender Antwort angegebene Verfahren ist selbstverständlich auch anwendbar, wenn der Minuendus oder der Subtrahendus eine reelle oder eine imaginäre Zahl ist (siehe Aufgabe 50).

also:

$$ts=a-\alpha$$

ferner:

$$q_1p_1=+bi; \qquad sp_2=-\beta i$$

also:

$$p_2q=+bi-\beta i=(b-\beta)i$$

Folglich ist p_2 der Punkt der Komplexen:

$$(a-\alpha)+(b-\beta)i$$

(bezogen auf das Koordinatensystem $MNOP$); dies ist aber nach der Antwort auf Frage 29 die Differenz:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i) \quad \text{(siehe Erkl. 110)}$$

Frage 65. Wie lässt sich die Differenz zweier komplexen Zahlen trigonometrisch darstellen?

Antwort. Mit Bezug auf Frage 9 ist:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$
$$\alpha+\beta i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$(a-\alpha)+(b-\beta)i=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(nach der Antwort auf Frage 57)

folglich ist:

$$(a+bi)-(\alpha+\beta i)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)-r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$
$$=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Frage 66. Wann ist der Modulus (Radiusvektor) der Differenz zweier komplexen Zahlen gleich der Summe und wann gleich der Differenz der Moduln des Minuendus und Subtrahendus?

Antwort. Es ist:

$$r=r_1+r_2$$

wenn beide Glieder des Subtrahendus negativ sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$ (also $\varphi_1=\varphi_2$ ist).

Es ist:

$$r=r_1-r_2$$

wenn $\varphi_2=180^0+\varphi_1$ ist, wenn also beide Glieder des Subtrahendus positiv sind und sich $a:b$ verhält wie $\alpha:\beta$.

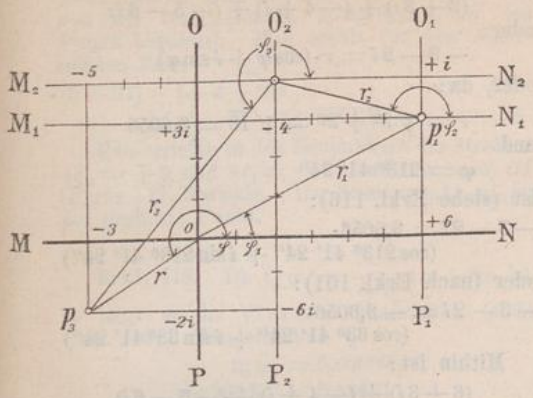
α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 45. Nachfolgende Summe ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$$

Auflösung. (Figur 10.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $\overline{0(+6)}$ und $\overline{0(+3i)}$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt den Punkt des ersten Summanden $6+3i$ dar. Durch p_1 lege man

Figur 10.



Erkl. 112. Besteht die darzustellende Summe aus mehreren Summanden, so empfiehlt es sich, die Summe zu berechnen und dann den Punkt der aus ihr resultierenden Komplexen zu ermitteln. Im vorliegenden Falle gibt:

$$(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i) = (6-4-5)+(3+1-6)i$$

(nach der Antwort auf Frage 26)

oder:

$$= -3-2i$$

Man errichte im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-3)}$ auf MN (in Figur 10) und im Endpunkte der Strecke $\overline{0(-2i)}$ auf OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann die komplexe Zahl $-3-2i$, folglich auch die gegebene Summe dar.

Erkl. 113. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+3}{+6} = +0{,}5$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (s. Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_1 &= +0{,}50000 \\ \operatorname{tg} 26^0\,30' &= +0{,}49858 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 142 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 36,4; folglich sind zu $26^0\,30'$ noch:

$$\frac{142}{36{,}4} = 3\,\frac{82'}{91} = 3'\,54''$$

hinzuzuzählen. Mithin ist:

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

Erkl. 114. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{-4} = -0{,}25$ ist, so liegt φ_2 im zweiten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_2 &= 0{,}25000 \\ \operatorname{tg} 14^0\,0' &= 0{,}24933 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 67 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel $14^0\,0'$ kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

parallel zu $MNOP$ ein neues Linienkreuz $M_1N_1O_1P_1$ so, dass p_1 den Nullpunkt desselben bildet. Hierauf errichte man im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(-4)}$ auf M_1N_1 und im Endpunkte der Strecke $\overline{p_1(+i)}$ auf O_1P_1 Normale; ihr Schnittpunkt stellt den zweiten Summanden $-4+i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)$, bezogen auf $MNOP$, dar. Diesen Punkt wähle man endlich als Nullpunkt eines dritten, zu den beiden ersten parallelen Linienkreuzes $M_2N_2O_2P_2$ und errichte sowohl im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-5)}$ auf M_2N_2 als auch im Endpunkte der Strecke $\overline{p_2(-6i)}$ auf O_2P_2 eine Normale. Der Schnittpunkt p_3 dieser beiden Normalen stellt den dritten Summanden $-5-6i$, bezogen auf das Koordinatensystem $M_2N_2O_2P_2$, oder die Summe $(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $M_1N_1O_1P_1$, oder die Summe $(6+3i)+(-4+i)+(-5-6i)$, bezogen auf $MNOP$, dar (vergl. Erkl. 112).

Trigonometrisch erhält man für:

$$6+3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 6{,}7082$$

und

$$\varphi_1 = 26^0\,33'\,54''$$

ist (siehe Erkl. 113):

$$6+3i = 6{,}7082\cdot(\cos 26^0 33' 54'' + i\sin 26^0 33' 54'')$$

Ferner ist:

$$-4+i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}1231$$

und

$$\varphi_2 = 165^0\,57'\,50''$$

ist (siehe Erkl. 114):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(\cos 165^0\,57'\,50'' + i\sin 165^0\,57'\,50'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-4+i = 4{,}1231\cdot(-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Sodann ist:

$$-5-6i = r_3\cdot(\cos\varphi_3 + i\sin\varphi_3)$$

oder, da:

$$r_3 = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} = 7{,}8102$$

und

$$\varphi_3 = 230^0\,11'\,41''$$

ist (siehe Erkl. 115):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(\cos 230^0\,11'\,41'' + i\sin 230^0\,11'\,41'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-5-6i = 7{,}8102\cdot(-\cos 50^0\,11'\,41'' - i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

$$= -7{,}8102\cdot(\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'')$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 - 14^0\,2'\,10'' = 165^0\,57'\,50''$$

Erkl. 115. Da $\operatorname{tg}\varphi_3 = \frac{-6}{-5} = +1{,}2$ ist, so liegt φ_3 im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_3 &= 1{,}2000 \\ \operatorname{tg} 50^0\,10' &= 1{,}1988 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 12 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 7,1. Zum Winkel $50^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{12}{7{,}1} = 1\,\frac{49'}{71} = 1'\,41''$$

Mithin ist:

$$\varphi_3 = 180^0 + 50^0\,11'\,41'' = 230^0\,11'\,41''$$

Erkl. 116. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2}{-3} = +0{,}66667$ ist, so liegt φ im dritten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 0{,}66667 \\ \operatorname{tg} 33^0\,40' &= 0{,}66608 \\ \hline \text{Rest:} & \quad 59 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 42. Zum Winkel $33^0\,40'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{42} = 1\,\frac{17'}{42} = 1'\,24''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 180^0 + 33^0\,41'\,24'' = 213^0\,41'\,24''$$

Endlich ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$-3-2i = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} = 3{,}6056$$

und

$$\varphi = 213^0\,41'\,24''$$

ist (siehe Erkl. 116):

$$-3-2i = 3{,}6056\cdot(\cos 213^0\,41'\,24'' + i\sin 213^0\,41'\,24'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-3-2i = -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Mithin ist:

$$(6+3i) + (-4+i) + (-5-6i)$$

oder:

$$\begin{aligned} -3-2i = {} & 6{,}7082\cdot(\cos 26^0\,33'\,54'' + i\sin 26^0\,33'\,54'') + 4{,}1231\cdot \\ & (-\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'') - 7{,}8102\cdot \\ & (\cos 50^0\,11'\,41'' + i\sin 50^0\,11'\,41'') \end{aligned}$$

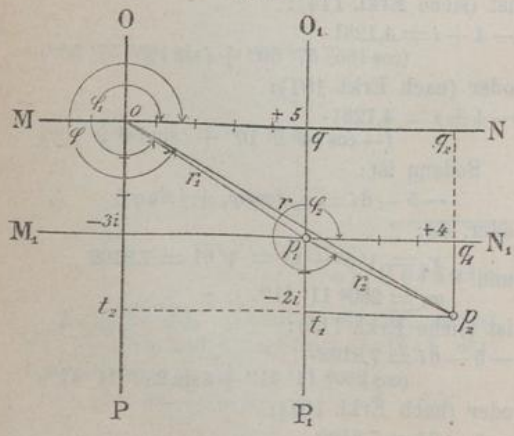
oder:

$$= -3{,}6056\cdot(\cos 33^0\,41'\,24'' + i\sin 33^0\,41'\,24'')$$

Aufgabe 46. Nachstehende Differenz ist graphisch und trigonometrisch darzustellen:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

Figur 11.



Auflösung. (Figur 11.) Man errichte in den Endpunkten $oq = 5$ und $ot = -3i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den Minuendus $5-3i$ dar. Diesen Punkt wähle man als Nullpunkt eines zweiten, zum ersten parallelen Koordinatensystems $M_1 N_1 O_1 P_1$ und errichte in den Endpunkten $p_1 q_1 = +4$ und $p_1 t_1 = -2i$ auf $M_1 N_1$ bezw. $O_1 P_1$ Normale. Ihr Schnittpunkt stellt das Entgegengesetzte des Subtrahendus, nämlich:

$$+4-2i \quad [\text{oder: } -(-4+2i)]$$

dar, bezogen auf das Koordinatensystem $M_1 N_1 O_1 P_1$, oder die Differenz:

$$(5-3i) - (-4+2i)$$

bezogen auf $MNOP$ (vergl. Erkl. 117).

Trigonometrisch erhält man für:

$$5-3i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34} = 5{,}831$$

und

$$\varphi_1 = 329^0\,2'\,10''$$

ist (siehe Erkl. 118):

Erkl. 117. Schneller gelangt man zum Ziel, wenn man die gegebene Differenz berechnet und von der resultierenden komplexen Zahl den Punkt bestimmt. Man erhält für den vorliegenden Fall:

$$(5-3i)-(-4+2i)=$$
$$5-3i+4+2i=+9-5i$$

Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_2=+9$ und $ot_2=-5i$ auf MN bezw. OP (Figur 11) Normale. Ihr Schnittpunkt p_2 ist der gesuchte Punkt.

Erkl. 118. Da $\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{-3}{+5}=-0{,}6$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}60000 \\ \operatorname{tg}30^0\,50' = 0{,}59691 \\ \hline \text{Rest:}\quad 309 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 39,4. Zum Winkel $30^0\,50''$ kommen also noch:

$$\frac{309}{39{,}4}=7\,\frac{166'}{197}=7'\,50''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1=360^0-30^0\,57'\,50''=329^0\,2'\,10''$$

Erkl. 119. Da $\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{-2}{+4}=-0{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält für φ_2 (nach Erkl. 113):

$$=360^0-26^0\,33'\,54''=333^0\,26'\,6''$$

Erkl. 120. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-5}{+9}=-0{,}55556$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 0{,}55556 \\ \operatorname{tg}29^0\,0' = 0{,}55431 \\ \hline \text{Rest:}\quad 125 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 38,1. Zum Winkel 29^0 kommen also noch:

$$\frac{125}{38{,}1}=3\,\frac{107'}{381}=3'\,17''$$

Mithin ist:

$$\varphi=360^0-29^0\,3'\,17''=330^0\,56'\,43''$$

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 329^0\,2'\,10''+i\sin 329^0\,2'\,10'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$5-3i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')$$

Ferner ist:

$$-(-4+2i)$$

oder:

$$+4-2i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=4{,}4721$$

und

$$\varphi_2=333^0\,26'\,6''$$

ist (siehe Erkl. 119):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 333^0\,26'\,6''+i\sin 333^0\,26'\,6'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$+4-2i=4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

Endlich ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r=\sqrt{9^2+5^2}=\sqrt{106}=10{,}295$$

und

$$\varphi=330^0\,56'\,43''$$

ist (siehe Erkl. 120):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 330^0\,56'\,43''+i\sin 330^0\,56'\,43'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$9-5i=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

Mithin ist:

$$(5-3i)-(-4+2i)$$

oder:

$$9-5i=5{,}831\cdot(\cos 30^0\,57'\,50''-i\sin 30^0\,57'\,50'')+4{,}4721\cdot(\cos 26^0\,33'\,54''-i\sin 26^0\,33'\,54'')$$

oder:

$$=10{,}295\cdot(\cos 29^0\,3'\,17''-i\sin 29^0\,3'\,17'')$$

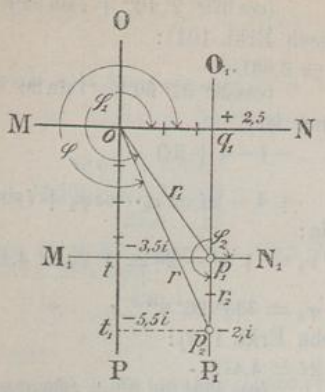
Aufgabe 47. Es ist die Summe:

$$(2{,}5-3{,}5i)+(-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. Man errichte in den Endpunkten $oq=+2{,}5$ und $ot=-3{,}5i$ auf MN bezw. OP (Figur 12) Normale, wähle ihren, den ersten Summanden der gegebenen Summe darstellenden Schnittpunkt als Nullpunkt eines neuen, zu $MNOP$ parallelen Koordinatensystems $M_1N_1O_1P_1$ und trage auf O_1P_1 die Strecke $p_1p_2=-2i$ ab, so stellt Punkt p_2 die Summe:

Figur 12.



Erkl. 121. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3,5}{+2,5} = -1,4$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,4000$$
$$\operatorname{tg} 54^0\,20' = 1,3934$$
$$\text{Rest: } 66$$

Differenz für 1 Minute = 8,6. Zum Winkel $54^0\,20'$ kommen also noch:

$$\frac{66}{8,6} = 7\frac{29'}{43} = 7'\,40''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 54^0\,27'\,40'' = 305^0\,32'\,20''$$

Erkl. 122. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5,5}{+2,5} = -2,2$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2,2000$$
$$\operatorname{tg} 65^0\,30' = 2,1943$$
$$\text{Rest: } 57$$

Differenz für 1 Minute = 17. Zum Winkel $65^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{57}{17} = 3\frac{6'}{17} = 3'\,21''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 65^0\,33'\,21'' = 294^0\,26'\,49''$$

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

bezogen auf das Linienkreuz $MNOP$, dar.

Trigonometrisch erhält man für:

$$2,5 - 3,5i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{2,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{18,30} = 4,3$$

und

$$\varphi_1 = 305^0\,32'\,20''$$

ist (nach Erkl. 121):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 305^0\,32'\,20'' + i\sin 305^0\,32'\,20'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'')$$

Ferner ist:

$$-2i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = 2$$

und

$$\varphi_2 = 270^0$$

ist (nach der Antwort auf Frage 59):

$$-2i = 2 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2i = -2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Endlich ist:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{2,5^2 + 5,5^2} = \sqrt{36,50} = 6,0415$$

und

$$\varphi = 294^0\,26'\,49''$$

ist (nach Erkl. 122):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 294^0\,26'\,49'' + i\sin 294^0\,26'\,49'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

Demnach erhält man für:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'') - 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Es ist die Summe:

$$(+2 - 3i) + (-3 + 2i) + (+5 + 3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 45.