Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

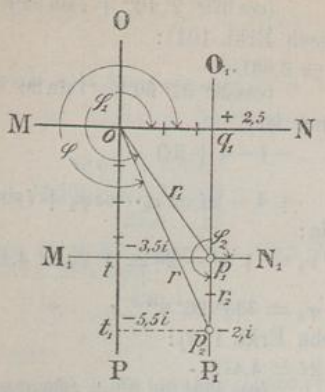
Stuttgart, 1891

b) Ungelöste Aufagben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Figur 12.



Erkl. 121. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-3,5}{+2,5} = -1,4$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1,4000$$
$$\operatorname{tg} 54^0\,20' = 1,3934$$
$$\text{Rest: } 66$$

Differenz für 1 Minute = 8,6. Zum Winkel $54^0\,20'$ kommen also noch:

$$\frac{66}{8,6} = 7\frac{29'}{43} = 7'\,40''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 54^0\,27'\,40'' = 305^0\,32'\,20''$$

Erkl. 122. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-5,5}{+2,5} = -2,2$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = 2,2000$$
$$\operatorname{tg} 65^0\,30' = 2,1943$$
$$\text{Rest: } 57$$

Differenz für 1 Minute = 17. Zum Winkel $65^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{57}{17} = 3\frac{6'}{17} = 3'\,21''$$

Mithin ist:

$$\varphi = 360^0 - 65^0\,33'\,21'' = 294^0\,26'\,49''$$

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

bezogen auf das Linienkreuz $MNOP$, dar.

Trigonometrisch erhält man für:

$$2,5 - 3,5i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{2,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{18,30} = 4,3$$

und

$$\varphi_1 = 305^0\,32'\,20''$$

ist (nach Erkl. 121):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 305^0\,32'\,20'' + i\sin 305^0\,32'\,20'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 3,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'')$$

Ferner ist:

$$-2i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = 2$$

und

$$\varphi_2 = 270^0$$

ist (nach der Antwort auf Frage 59):

$$-2i = 2 \cdot (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder (nach Erkl. 101):

$$-2i = -2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Endlich ist:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder, da:

$$r = \sqrt{2,5^2 + 5,5^2} = \sqrt{36,50} = 6,0415$$

und

$$\varphi = 294^0\,26'\,49''$$

ist (nach Erkl. 122):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 294^0\,26'\,49'' + i\sin 294^0\,26'\,49'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$2,5 - 5,5i = 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

Demnach erhält man für:

$$(2,5 - 3,5i) + (-2i)$$

oder:

$$2,5 - 5,5i = 4,3 \cdot (\cos 54^0\,27'\,40'' - i\sin 54^0\,27'\,40'') - 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

oder:

$$= 6,0415 \cdot (\cos 65^0\,33'\,21'' - i\sin 65^0\,33'\,21'')$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 48. Es ist die Summe:

$$(+2 - 3i) + (-3 + 2i) + (+5 + 3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 45.

Aufgabe 49. Es ist die Differenz:

$$(-4+5i)-(+1-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 46.

Aufgabe 50. Es ist die Differenz:

$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Man berechne zunächst die gegebene Differenz und suche dann von der aus dieser Rechnung resultierenden komplexen Zahl den Punkt auf.

2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren.

Frage 67. Wie lässt sich das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$$

also wiederum eine komplexe Zahl.

Es sei nun $a+bi$ dargestellt durch:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$\alpha+\beta i$ durch:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

und $(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ durch:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Dann ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

(nach Erkl. 36)

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

Nun ist nach Erkl. 123:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Demnach gibt:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Erkl. 123. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Erkl. 124. Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)$$
$$+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$$