Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Aufgabe 49. Es ist die Differenz:

$$(-4+5i)-(+1-2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 46.

Aufgabe 50. Es ist die Differenz:

$$-5{,}5-(-2{,}5+1{,}5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Man berechne zunächst die gegebene Differenz und suche dann von der aus dieser Rechnung resultierenden komplexen Zahl den Punkt auf.

2) Ueber das graphische und trigonometrische Multiplizieren.

Frage 67. Wie lässt sich das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 33 gibt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$$

also wiederum eine komplexe Zahl.

Es sei nun $a+bi$ dargestellt durch:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

$\alpha+\beta i$ durch:

$$r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

und $(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ durch:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Dann ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

(nach Erkl. 36)

oder, weil $i^2=-1$ ist:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2$$
$$+i\cdot\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)$$

Nun ist nach Erkl. 123:

$$\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Demnach gibt:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=$$
$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

Erkl. 123. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Erkl. 124. Sind mehr als zwei Faktoren vorhanden, so erhält man:

$$r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$=r_1\cdot r_2\cdot r_3\cdots[\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)$$
$$+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\cdots)]$$

Erkl. 124 a. Aus nebenstehender Antwort ergibt sich folgender Satz:

„Das Produkt beliebig vieler komplexen Zahlen ist wiederum eine komplexe Zahl, der Modulus ist gleich dem Produkte der Moduln und die Amplitude gleich der Summe der Amplituden aller Faktoren."

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden miteinander multipliziert, indem man ihre Moduln multipliziert und die Amplituden addiert."

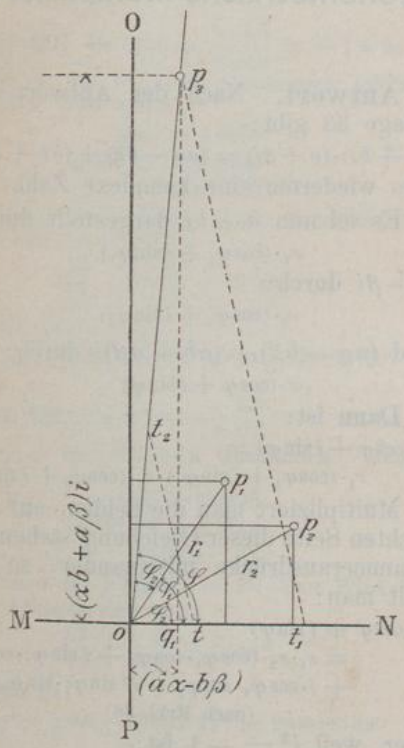
(Vergl. Erkl. 124 a).

Frage 68. Wie findet man in der Zahlenebene den Punkt, welcher das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

darstellt?

Figur 13.



Erkl. 125. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Dreiecke, welche in zwei Paaren gleichliegender Winkel übereinstimmen, sind ähnlich."

In den Dreiecken ott_2 und ot_1p_3 (Fig. 13) ist:

$$\sphericalangle t_2ot = \sphericalangle p_3ot_1 = \varphi$$

ferner:

$$\sphericalangle t_2to = \sphericalangle p_3t_1o$$

weil sie paarweise parallele und gleichgerichtete Schenkel besitzen.

Antwort. (Figur 13). Man ermittele in der durch das Koordinatensystem $MNOP$ bestimmten Zahlenebene die Punkte p_1 und p_2, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf trage man an den Modulus r_1 der Komplexen $a+bi$ den Winkel φ_2, welchen der Modulus r_2 der Komplexen $\alpha+\beta i$ mit der Achse der positiven reellen Zahlen bildet, so an, dass der Winkel φ gleich der Summe der beiden Winkel φ_1 und φ_2 ist; mache ot gleich der angenommenen Längeneinheit, $ot_1 = r_1$ und $ot_2 = r_2$, verbinde t mit t_2 und ziehe durch t_1 zu tt_2 eine Parallele, welche die über t_2 hinaus verlängerte ot_2 in p_3 schneidet. Dann erhält man, weil die beiden Dreiecke ott_2 und ot_1p_3 ähnlich sind (nach Erkl. 125), die Proportion:

$$ot : ot_1 = ot_2 : op_3 \quad \text{(siehe Erkl. 126)}$$

oder:

$$1 : r_1 = r_2 : r$$

d. h.:

$$r = r_1 \cdot r_2 \quad \text{(nach Erkl. 20a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle\varphi_1 + \sphericalangle\varphi_2 \quad \text{(nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1+\varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf die vorige Frage:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Demnach stellt Punkt p_3 das Produkt:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

dar. Hieraus folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Produktes komplexer Zahlen bildet

Erkl. 126. In ähnlichen Dreiecken stehen die Seiten, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen, zu einander in demselben Verhältnisse.

Erk. 127. Ein kürzeres Verfahren besteht darin, dass man das gegebene Produkt berechnet und den Punkt ermittelt, welcher die aus der Rechnung resultierende Komplexe darstellt. Da $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)=(a\alpha-b\beta)+(\alpha b+a\beta)i$ ist, so hat man auf MN (Figur 13) vom Nullpunkte aus $(a\alpha-b\beta)$ Einheiten und auf OP ebenso $(\alpha b+a\beta)$ Einheiten abzutragen und in den Endpunkten q_1 und s_1 dieser Strecken auf MN bezw. OP Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 ist der gesuchte Punkt.

Nach der Antwort auf Frage 37 ist:

$$r=\sqrt{(a\alpha-b\beta)^2+(\alpha b+a\beta)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

d. i.:

$$=r_1\cdot r_2$$

Ferner ist:

$$\cos\varphi=\frac{a\alpha-b\beta}{r}=\frac{a\alpha}{r_1\cdot r_2}-\frac{b\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$, $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\cdot\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Endlich ist:

$$\sin\varphi=\frac{\alpha b+a\beta}{r}=\frac{\alpha b}{r_2\cdot r_1}+\frac{a\beta}{r_1\cdot r_2}$$

oder, weil $\frac{\alpha}{r_2}=\cos\varphi_2$, $\frac{b}{r_1}=\sin\varphi_1$, $\frac{a}{r_1}=\cos\varphi_1$ und $\frac{\beta}{r_2}=\sin\varphi_2$ ist:

$$\sin\varphi=\cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)\quad\text{(nach Erkl. 123)}$$

Punkt p_3 stellt also die komplexe Zahl:

$$r_1\cdot r_2\cdot[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

dar, d. h. das Produkt:

$$r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

oder:

$$(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$$

mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Summe der Winkel, welche die Moduln der einzelnen Faktoren mit jener Achse einschliessen, und seine Länge ist gleich dem Produkte der Moduln der einzelnen Faktoren."

Erkl. 128. Verbindet man p_3 (Figur 13) mit p_1 und p_2 mit t, so sind die beiden Dreiecke op_3p_1 und op_2t ähnlich (siehe Erkl. 128a). Denn es ist:

$$op_3=op_1\cdot op_2\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$1\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder, da $1=ot$ ist:

$$ot\cdot op_3=op_1\cdot op_2$$

oder nach Erkl. 20:

$$ot:op_2=op_1:op_3$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle top_3=\sphericalangle top_2+\sphericalangle top_1\quad\text{(nach Konstruktion)}$$

oder:

$$\sphericalangle top_3-\sphericalangle top_1=\sphericalangle top_2$$

d. i.:

$$\sphericalangle p_1op_3=\sphericalangle top_2$$

Erkl. 128 a. Ein planimetrischer Lehrsatz lautet:

„Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen eines Paares von Seiten und in den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen."

Erkl. 129. Während die Lage des die Summe oder Differenz von $a+bi$ und $\alpha+\beta i$ darstellenden Punktes von der als Längeneinheit angenommenen Strecke nicht abhängt, ist der Punkt des Produktes dieser Komplexen von dieser Länge wesentlich abhängig. Denn wird letztere im Verhältnis von $1:u$ (u irgend eine reelle Zahl bedeutend) vergrössert, so nehmen die Moduln (Radienvektoren) von $(a+bi)+(\alpha+\beta i)$ und von $(a+bi)-(\alpha+\beta i)$ in demselben Verhältnisse zu, während der Modul von $(a+bi)\cdot(\alpha+\beta i)$ im Verhältnisse $1:u^2$ vergrössert wird.

Frage 69. Wie findet man in der Zahlenebene den das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellenden Punkt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$$

so ist:

$$a-bi=r_1\cdot(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

Man erhält also für:

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_1\cdot(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)$$

Multipliziert man die beiden, auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Klammerausdrücke miteinander, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(a-bi)=r_1^2\cdot(\cos^2\varphi_1+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1-i^2\cdot\sin^2\varphi_1)$$

oder, da sich die Glieder $+i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1$ und $-i\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_1$ fortheben und $i^2=-1$ ist:

$$(a+bi)(a-bi)=r_1^2\cdot(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)$$

Nun ist nach Erkl. 130:

$$\sin^2\varphi_1+\cos^2\varphi_1=+1$$

Folglich gibt:

$$(a+bi)(a-bi)=r_1^2$$

Demnach liegt der das Produkt zweier konjugierten komplexen Zahlen darstellende Punkt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und in einer Entfernung von $r_1^2=a^2+b^2$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Erkl. 130. Nach einem Satze der Goniometrie ist die Summe der Quadrate von Sinus und Cosinus eines und desselben Winkels gleich $+1$.

Frage 70. Wie lässt sich das Produkt:

a) zweier reellen Zahlen
b) zweier imaginären Zahlen
c) einer reellen und einer imaginären Zahl

d) einer reellen und einer komplexen Zahl

e) einer imaginären und einer komplexen Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen?

Antwort.

a) Sind beide reellen Faktoren (z. B. a und α) positiv, so ist das Produkt:

$$a \cdot \alpha = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$= r_1 \cdot r_2$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Sind beide reellen Faktoren negativ, so ist das Produkt:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$(-a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

Demnach liegt der Punkt dieses Produktes auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 360^0 bildet, d. h. auf dieser Achse und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes.

Ist ein Faktor (z. B. a) positiv, der andere (α) negativ, so erhält man:

$$(+a) \cdot (-\alpha) = r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt hiernach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von 180^0 einschliesst, d. h. auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = a \cdot \alpha$ Einheiten.

b) Sind beide imaginären Zahlen (z. B. bi und βi) positiv, so ist das Produkt:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0) \cdot r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

oder:

$$bi \cdot \beta i = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der das Produkt $bi \cdot \beta i$ darstellende Punkt liegt hiernach auf der Achse der negativen reellen Zahlen und ist um

$r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte des Linienkreuzes entfernt.

Sind beide imaginären Zahlen negativ, so erhält man:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

oder:

$$(-bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot r_2\cdot(\cos 540^0 + i \sin 540^0)$$

oder (nach Erkl. 131):

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Mithin befindet sich der das Produkt $(-bi)\cdot(-\beta i)$ darstellende Punkt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist ein Faktor (z. B. bi) positiv, der andere (βi) negativ, so ist das Produkt:

$$(+bi)\cdot(-\beta i) =$$
$$r_1\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = b \cdot \beta$ Einheiten vom Nullpunkte.

c) Wird die komplexe Zahl $a + bi$ dargestellt durch $r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ und ist die reelle Zahl α positiv, so gibt das Produkt:

$$(a + bi)\cdot(+\alpha) =$$
$$r_1\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\cdot r\cdot(\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

Der das Produkt $(a + bi)\cdot(+\alpha)$ darstellende Punkt liegt also auf dem Modulus von $(a + bi)$ in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus von $(a + bi)$. (Siehe Erkl. 132.)

Ist die reelle Zahl negativ, so erhält man:

$$(a + bi)\cdot(-\alpha) =$$
$$r_1\cdot(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(180^0 + \varphi_1) + i \sin(180^0 + \varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Produktes liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus des komplexen Faktors und zwar in einer Entfernung von $r_1 \cdot r_2 = \alpha \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

Erkl. 131. Nach einem goniometrischen Satze ist:

$$\sin(360^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(360^0 + \alpha) = \cos \alpha$$
$$\sin(720^0 + \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(720^0 + \alpha) = \cos \alpha$$

u. s. w.

Erkl. 132. Aus der nebenstehenden Antwort ergeben sich folgende Sätze:

1) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer positiven reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus (Radiusvektor) von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \alpha$ vergrössert.

2) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer negativen reellen Zahl α multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \alpha$ vergrössert und gleichzeitig um 180^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

3) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer positiven imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \beta$ vergrössert und gleichzeitig um 90^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

4) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer negativen imaginären Zahl βi multipliziert, so wird dadurch der Modulus von $a + bi$ im Verhältnis von $1 : \beta$ vergrössert und gleichzeitig um 270^0 nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

Aus der Antwort auf Frage 67 folgt noch:

5) Wird eine komplexe Zahl $a + bi$ mit einer andern komplexen Zahl $\alpha + \beta i$ multipliziert, so wird dadurch der Modulus im Verhältnis von $1 : (\text{Modulus von } \alpha + \beta i)$ vergrössert und gleichzeitig um den Neigungswinkel von $\alpha + \beta i$ nach der Richtung gedreht, nach welcher die Neigungswinkel wachsen.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

d) Ist der imaginäre Faktor βi positiv, so erhält man für:

$$(a+bi)\cdot(+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(90^0+\varphi_1) + i\sin(90^0+\varphi_1)]$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt also auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem β-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

Ist der imaginäre Faktor βi negativ, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(270^0+\varphi_1) + i\sin(270^0+\varphi_1)]$$

Dieses Produkt wird dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden liegt, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Er ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes um $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten entfernt. Der Modulus von $(a+bi)\cdot(-\beta i)$ ist gleich dem β-fachen vom Modulus des komplexen Faktors (siehe Erkl. 132).

α) Gelöste Aufgaben.

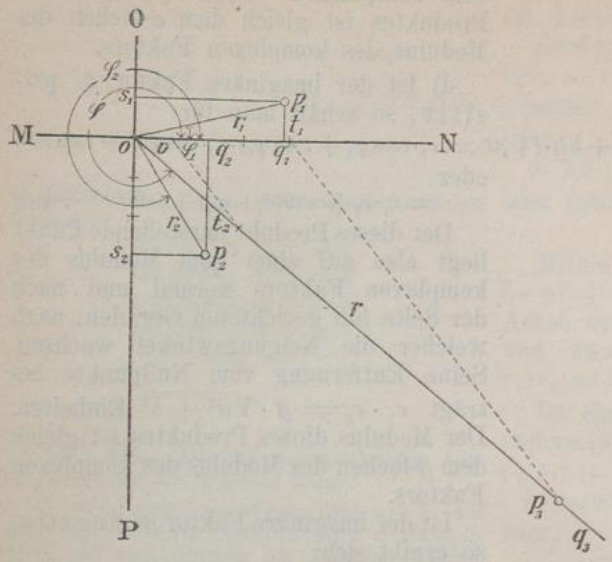
Aufgabe 51. Es ist das Produkt:

$$(4+i)\cdot(2-3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. (Figur 14.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +4$, $os_1 = +i$, $oq_2 = +2$ und $os_2 = -3i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an die Linie $op_1 = r_1$ den Winkel $q_2op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $q_1oq_3 = q_2op_2 + q_1op_1$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = op_1 = r_1$ und $ot_2 = op_2 = r_2$ und verbinde v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit t_2. Endlich ziehe man

Figur 14.



Erkl. 133. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+1}{+4} = +0{,}25$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}25000$$
$$\operatorname{tg} 14^0\,0' = 0{,}24933$$
$$\text{Rest:}\quad 67$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel 14^0 kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

Erkl. 134. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-3}{+2} = -1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest:}\quad 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 360^0 - 56^0\,18'\,37'' = 303^0\,41'\,23'$$

Aufgabe 52. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(3-4i)\cdot(+2)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und dieses Produkt trigonometrisch zu berechnen.

Auflösung. (Figur 15.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +3$ und $os_1 = -4i$ auf MN bezw. OP Normale. durch t_1 eine Parallele zu ot_2 bis zum Schnittpunkte p_3 mit dem Schenkel oq_3 des Winkels $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(4+i)\cdot(2-3i)$ darstellt.

Trigonometrisch erhält man für:

$$4 + i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}123\cdot\cdot$$

und

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

ist (nach Erkl. 133):

$$4 + i = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Ferner ist:

$$2 - 3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 303^0\,41'\,23''$$

ist (nach Erkl. 134):

$$2 - 3i = 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

Mithin erhält man für:

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')\cdot 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

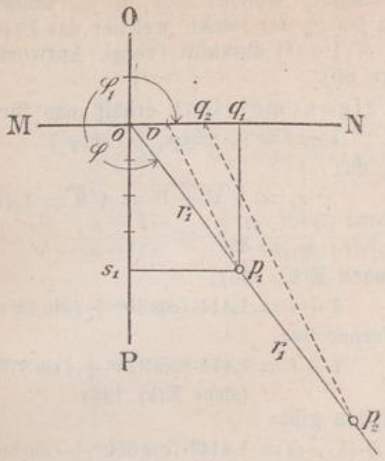
oder (nach Antwort auf Frage 57):

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 14{,}87\cdot(\cos 317^0\,43'\,33'' + i\sin 317^0\,43'\,33'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 14{,}87\cdot(\cos 42^0\,16'\,27'' - i\sin 42^0\,16'\,27'')$$

Figur 15.



Erkl. 135. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-4}{+3} = -1{,}3333\ldots$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1{,}3333$$
$$\operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Zum Winkel 53^0 kommen also noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 53^0\,7'\,47'' = 306^0\,52'\,13''$$

Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den ersten Faktor des gegebenen Produktes dar. Der Punkt des zweiten Faktors $(+2)$ liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist q_2. Der Modulus dieses Faktors oq_2 schliesst mit der Hauptachse einen Winkel von 0^0 ein, daher ist $\varphi = \varphi_1 + 0^0 = \varphi_1$. Man verbinde p_1 mit o und verlängere diese Gerade über p_1 hinaus; man verbinde ferner v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit p_1 und ziehe durch q_2 eine Parallele, welche die verlängerte op_1 in p_2 schneidet. Dann ist p_2 der Punkt, welcher das gegebene Produkt darstellt. Er ist um $2r_1$ Einheiten vom Nullpunkt des Linienkreuzes entfernt [vergl. Erkl. 132, 1)].

Trigonometrisch erhält man für:

$$3 - 4i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und

$$\varphi_1 = 306^0\,52'\,13''$$

ist (nach Erkl. 135):

$$3 - 4i = 5 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

Ferner ist:

$$+2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da $r_2 = 2$ und $\varphi_2 = 0^0$ ist:

$$+2 = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Mithin erhält man für:

$$(3 - 4i)\cdot(+2) =$$
$$10 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

oder (nach Erkl. 101):

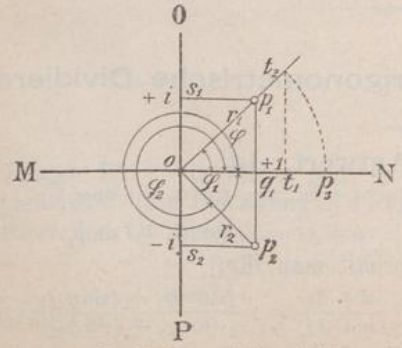
$$= 10 \cdot (\cos 53^0\,7'\,47'' + i\sin 53^0\,7'\,47'')$$

Aufgabe 53. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(1 + i) \text{ und } (1 - i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Figur 16.



Auflösung. (Figur 16.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$, $os_1 = +i$ und $os_2 = -i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an op_1 den Winkel $q_1op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $\varphi = q_1op_1 + q_1op_2$, d. i. $= \varphi_1 + \varphi_2$ wird. Alsdann verlängere man op_1 über p_1 hinaus, trage $op_2 = r_2$ auf oN von o aus ab und ziehe durch den Endpunkt t_1 dieser Strecke eine Parallele zu q_1p_1, welche die verlängerte op_1 in t_2 schneidet. Dann findet statt:

$$op_1 : ot_2 = oq_1 : ot_1$$

oder:

$$r_1 : ot_2 = +1 : r_2$$

d. i.:

$$ot_2 = r_1 \cdot r_2$$

Erkl. 136. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten und man erhält:

$$\varphi_1 = 45^0$$

Der Winkel φ_2 liegt im vierten Quadranten und ist:

$$= 360^0 - 45^0 = 315^0$$

Endlich schlage man mit $o t_2$ um o einen Kreisbogen, welcher $o N$ in p_3 schneidet. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(1+i)(1-i)$ darstellt (vergl. Antwort auf Frage 69).

Trigonometrisch erhält man für:

$$1 + i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_1 = 45^0$$

ist (nach Erkl. 136):

$$1 + i = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Ferner ist:

$$1 - i = 1{,}414 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0)$$

(siehe Erkl. 136)

Mithin gibt:

$$(1+i)\cdot(1-i) = 1{,}414^2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

oder:

$$= 2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

d. i.:

$$= 2$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Es ist das Produkt:

$$(-2-i)\cdot(-3+2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 51.

Aufgabe 55. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(-4+5i)\cdot(-2i)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und das Produkt trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf Frage 70, d) und nach Erkl. 132, 4).

Aufgabe 56. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(-2+5i)\cdot(-2-5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 53.

---

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren.

Frage 71. Wie lässt sich der Quotient:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

und

$$\alpha + \beta i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$