Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

vom Nullpunkte. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem α-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

d) Ist der imaginäre Faktor βi positiv, so erhält man für:

$$(a+bi)\cdot(+\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(90^0+\varphi_1) + i\sin(90^0+\varphi_1)]$$

Der dieses Produkt darstellende Punkt liegt also auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten. Der Modulus dieses Produktes ist gleich dem β-fachen des Modulus des komplexen Faktors.

Ist der imaginäre Faktor βi negativ, so ergibt sich:

$$(a+bi)\cdot(-\beta i) = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

oder:

$$= r_1\cdot r_2\cdot[\cos(270^0+\varphi_1) + i\sin(270^0+\varphi_1)]$$

Dieses Produkt wird dargestellt durch einen Punkt, welcher auf einer zum Modulus des komplexen Faktors normal und nach der Seite hin gerichteten Geraden liegt, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Er ist vom Nullpunkte des Linienkreuzes um $r_1 \cdot r_2 = \beta \cdot \sqrt{a^2+b^2}$ Einheiten entfernt. Der Modulus von $(a+bi)\cdot(-\beta i)$ ist gleich dem β-fachen vom Modulus des komplexen Faktors (siehe Erkl. 132).

α) Gelöste Aufgaben.

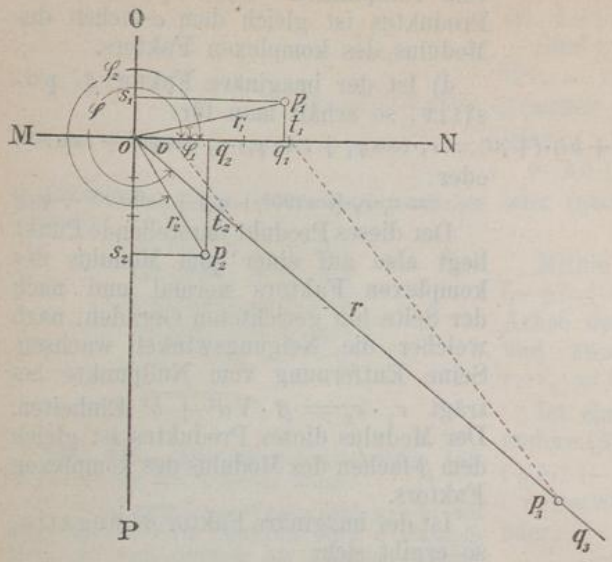
Aufgabe 51. Es ist das Produkt:

$$(4+i)\cdot(2-3i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Auflösung. (Figur 14.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +4$, $os_1 = +i$, $oq_2 = +2$ und $os_2 = -3i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an die Linie $op_1 = r_1$ den Winkel $q_2op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $q_1oq_3 = q_2op_2 + q_1op_1$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = op_1 = r_1$ und $ot_2 = op_2 = r_2$ und verbinde v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit t_2. Endlich ziehe man

Figur 14.



Erkl. 133. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{+1}{+4} = +0{,}25$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}25000$$
$$\operatorname{tg} 14^0\,0' = 0{,}24933$$
$$\text{Rest:}\quad 67$$

Differenz für 1 Minute = 30,9. Zum Winkel 14^0 kommen also noch:

$$\frac{67}{30{,}9} = 2\,\frac{52'}{309} = 2'\,10''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

Erkl. 134. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{-3}{+2} = -1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest:}\quad 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 360^0 - 56^0\,18'\,37'' = 303^0\,41'\,23'$$

Aufgabe 52. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(3-4i)\cdot(+2)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und dieses Produkt trigonometrisch zu berechnen.

Auflösung. (Figur 15.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +3$ und $os_1 = -4i$ auf MN bezw. OP Normale. durch t_1 eine Parallele zu ot_2 bis zum Schnittpunkte p_3 mit dem Schenkel oq_3 des Winkels $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(4+i)\cdot(2-3i)$ darstellt.

Trigonometrisch erhält man für:

$$4 + i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17} = 4{,}123\cdot\cdot$$

und

$$\varphi_1 = 14^0\,2'\,10''$$

ist (nach Erkl. 133):

$$4 + i = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')$$

Ferner ist:

$$2 - 3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da:

$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 303^0\,41'\,23''$$

ist (nach Erkl. 134):

$$2 - 3i = 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

Mithin erhält man für:

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 4{,}123\cdot(\cos 14^0\,2'\,10'' + i\sin 14^0\,2'\,10'')\cdot 3{,}606\cdot(\cos 303^0\,41'\,23'' + i\sin 303^0\,41'\,23'')$$

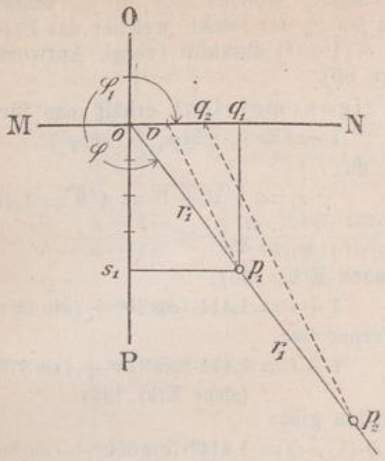
oder (nach Antwort auf Frage 57):

$$(4+i)\cdot(2-3i) = 14{,}87\cdot(\cos 317^0\,43'\,33'' + i\sin 317^0\,43'\,33'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 14{,}87\cdot(\cos 42^0\,16'\,27'' - i\sin 42^0\,16'\,27'')$$

Figur 15.



Erkl. 135. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-4}{+3} = -1{,}3333\ldots$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 1{,}3333$$
$$\operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270$$
$$\text{Rest: } 67$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Zum Winkel 53^0 kommen also noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 53^0\,7'\,47'' = 306^0\,52'\,13''$$

Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den ersten Faktor des gegebenen Produktes dar. Der Punkt des zweiten Faktors $(+2)$ liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist q_2. Der Modulus dieses Faktors oq_2 schliesst mit der Hauptachse einen Winkel von 0^0 ein, daher ist $\varphi = \varphi_1 + 0^0 = \varphi_1$. Man verbinde p_1 mit o und verlängere diese Gerade über p_1 hinaus; man verbinde ferner v (den Endpunkt der Strecke $ov = +1$) mit p_1 und ziehe durch q_2 eine Parallele, welche die verlängerte op_1 in p_2 schneidet. Dann ist p_2 der Punkt, welcher das gegebene Produkt darstellt. Er ist um $2r_1$ Einheiten vom Nullpunkt des Linienkreuzes entfernt [vergl. Erkl. 132, 1)].

Trigonometrisch erhält man für:

$$3 - 4i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

und

$$\varphi_1 = 306^0\,52'\,13''$$

ist (nach Erkl. 135):

$$3 - 4i = 5 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

Ferner ist:

$$+2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

oder, da $r_2 = 2$ und $\varphi_2 = 0^0$ ist:

$$+2 = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

Mithin erhält man für:

$$(3 - 4i)\cdot(+2) =$$
$$10 \cdot (\cos 306^0\,52'\,13'' + i\sin 306^0\,52'\,13'')$$

oder (nach Erkl. 101):

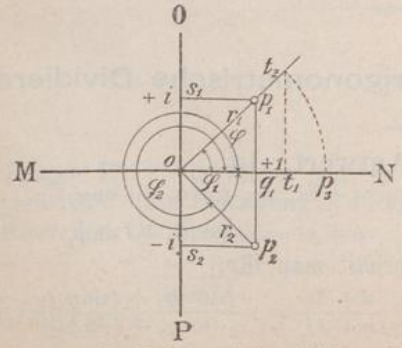
$$= 10 \cdot (\cos 53^0\,7'\,47'' + i\sin 53^0\,7'\,47'')$$

Aufgabe 53. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(1 + i) \text{ und } (1 - i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Figur 16.



Auflösung. (Figur 16.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$, $os_1 = +i$ und $os_2 = -i$ auf MN bezw. OP Normale, dann erhält man in ihren Schnittpunkten p_1 und p_2 die Punkte, welche die gegebenen Faktoren darstellen. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an op_1 den Winkel $q_1op_2 = \varphi_2$ so an, dass der Winkel $\varphi = q_1op_1 + q_1op_2$, d. i. $= \varphi_1 + \varphi_2$ wird. Alsdann verlängere man op_1 über p_1 hinaus, trage $op_2 = r_2$ auf oN von o aus ab und ziehe durch den Endpunkt t_1 dieser Strecke eine Parallele zu q_1p_1, welche die verlängerte op_1 in t_2 schneidet. Dann findet statt:

$$op_1 : ot_2 = oq_1 : ot_1$$

oder:

$$r_1 : ot_2 = +1 : r_2$$

d. i.:

$$ot_2 = r_1 \cdot r_2$$

Erkl. 136. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten und man erhält:

$$\varphi_1 = 45^0$$

Der Winkel φ_2 liegt im vierten Quadranten und ist:

$$= 360^0 - 45^0 = 315^0$$

Endlich schlage man mit $o t_2$ um o einen Kreisbogen, welcher $o N$ in p_3 schneidet. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(1+i)(1-i)$ darstellt (vergl. Antwort auf Frage 69).

Trigonometrisch erhält man für:

$$1 + i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_1 = 45^0$$

ist (nach Erkl. 136):

$$1 + i = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Ferner ist:

$$1 - i = 1{,}414 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0)$$

(siehe Erkl. 136)

Mithin gibt:

$$(1+i)\cdot(1-i) = 1{,}414^2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

oder:

$$= 2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

d. i.:

$$= 2$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Es ist das Produkt:

$$(-2-i)\cdot(-3+2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 51.

Aufgabe 55. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(-4+5i)\cdot(-2i)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und das Produkt trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf Frage 70, d) und nach Erkl. 132, 4).

Aufgabe 56. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(-2+5i)\cdot(-2-5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 53.

---

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren.

Frage 71. Wie lässt sich der Quotient:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

und

$$\alpha + \beta i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$