Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Erkl. 136. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_1 im ersten Quadranten und man erhält:

$$\varphi_1 = 45^0$$

Der Winkel φ_2 liegt im vierten Quadranten und ist:

$$= 360^0 - 45^0 = 315^0$$

Endlich schlage man mit $o t_2$ um o einen Kreisbogen, welcher $o N$ in p_3 schneidet. Dann ist p_3 der Punkt, welcher das Produkt $(1+i)(1-i)$ darstellt (vergl. Antwort auf Frage 69).

Trigonometrisch erhält man für:

$$1 + i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

oder, da:

$$r_1 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_1 = 45^0$$

ist (nach Erkl. 136):

$$1 + i = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Ferner ist:

$$1 - i = 1{,}414 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0)$$

(siehe Erkl. 136)

Mithin gibt:

$$(1+i)\cdot(1-i) = 1{,}414^2 \cdot (\cos 360^0 + i \sin 360^0)$$

oder:

$$= 2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

d. i.:

$$= 2$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 54. Es ist das Produkt:

$$(-2-i)\cdot(-3+2i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 51.

Aufgabe 55. Es ist in der Zahlenebene der das Produkt:

$$(-4+5i)\cdot(-2i)$$

darstellende Punkt zu ermitteln und das Produkt trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf Frage 70, d) und nach Erkl. 132, 4).

Aufgabe 56. Es ist das Produkt der beiden konjugierten komplexen Zahlen:

$$(-2+5i)\cdot(-2-5i)$$

graphisch und trigonometrisch darzustellen.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 53.

---

3) Ueber das graphische und trigonometrische Dividieren.

Frage 71. Wie lässt sich der Quotient:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$$

und

$$\alpha + \beta i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

so erhält man für:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i \sin\varphi_2)$$

so ergibt sich:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

oder:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 - i^2 \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}{r_2 \cdot r_2 \cdot (\cos^2\varphi_2 + i\sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_2 - i^2 \sin^2\varphi_2)}$$

oder, weil $i^2 = -1$, ferner:

$$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(nach Erkl. 137)

und

$$\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2 = +1 \quad \text{(nach Erkl. 130)}$$

ist und sich ferner die Glieder:

$$+i\sin\varphi_2\cos\varphi_2 \text{ und } -i\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

sowie ein Faktor r_2 im Zähler und Nenner fortheben:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Hieraus folgt der Satz:

„Komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Moduln dividiert und die Amplituden subtrahiert."

Erkl. 137. Nach einem Satze der Goniometrie ist:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Frage 72. Wie lässt sich der reciproke Wert von $a+bi$ (siehe Erkl. 15) trigonometrisch darstellen?

Antwort. Man erhält für:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}$$

und wenn man Zähler und Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

multipliziert:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}$$

oder:

$$= \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1 \cdot r_1 \cdot (\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1)} = \frac{1}{r_1} \cdot (\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)$$

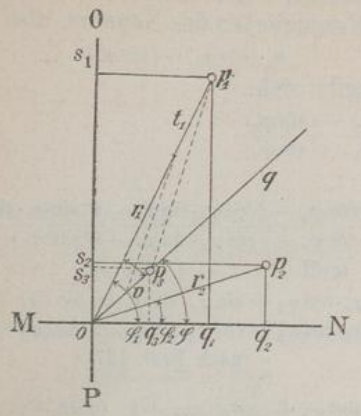
Frage 73. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt?

Antwort. (Fig. 17.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$, $os_1 = +bi$, $oq_2 = +\alpha$ und $os_2 = +\beta i$ auf MN bezw. OP Normale. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann die kom-

Figur 17.



Erkl. 138. Ein zweites Verfahren zur Ermittelung des Punktes, welcher den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

darstellt, besteht darin, dass man den Quotienten berechnet und den Punkt der resultierenden Komplexen in der Zahlenebene aufsucht. Da (nach Antwort auf Frage 38):

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i} = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2} + i \cdot \frac{(a\beta-\alpha b)}{\alpha^2+\beta^2}$$

gibt, so hat man auf der Achse der reellen Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$oq_3 = \frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

und auf der Achse der imaginären Zahlen im Endpunkte der Strecke:

$$os_3 = \frac{a\beta-\alpha b}{\alpha^2+\beta^2}$$

Normale zu errichten. Ihr Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar.

Erkl. 139. Ist die Amplitude des Divisors grösser als die des Dividendus, so gibt $(\varphi_1 - \varphi_2)$ einen negativen Winkel φ. Dann bildet der Modulus des Quotienten mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel $(360^0 - \varphi)$. (Siehe Erkl. 142. Vergl. die Aufgaben 57 und 58.)

Erkl. 140. Die graphische Darstellung der Division komplexer Zahlen besteht nach nebenstehender Antwort also darin, dass der Modulus (Radiusvektor) des Dividendus im Verhältnisse von (Modulus des Divisors) : 1 geändert und gleichzeitig um die Amplitude des Divisors nach der Richtung gedreht wird, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen.

plexen Zahlen $a+bi$ bezw. $\alpha+\beta i$ in der durch das Linienkreuz bestimmten Zahlenebene dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel p_2oq_2 so an, dass Winkel $qoN = p_1oq_1 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot_1 = r_2$ und $ov = 1$ (der angenommenen Längeneinheit), verbinde v mit t_1 und ziehe durch p_1 zu t_1v eine Parallele bis zum Schnittpunkte p_3 mit oq.

Dann erhält man (nach Erkl. 126):

$$op_1 : ot_1 = op_3 : ov$$

oder:

$$r_1 : r_2 = op_3 : 1$$

daraus folgt:

$$op_3 = r = \frac{r_1}{r_2} \text{ (nach Erkl. 20a)}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle\varphi_1 - \sphericalangle\varphi_2 \text{ (nach Konstruktion)}$$

also:

$$\cos\varphi = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

und

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Mithin ist:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

oder nach der Antwort auf Frage 71:

$$r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

Demnach stellt Punkt p_3 den Quotienten:

$$\frac{a+bi}{\alpha+\beta i}$$

dar.

Aus dieser Konstruktion ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier komplexen Zahlen ist gleich dem Quotienten des Modulus des Dividendus durch den des Divisors und bildet mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel gleich der Differenz der Winkel, welche die Moduln des Dividendus und des Divisors mit jener Achse einschliessen."

(Vergl. Erkl. 139.)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 74. Wie lässt sich der Quotient

a) zweier reellen Zahlen

b) einer reellen Zahl durch eine imaginäre Zahl

c) zweier imaginären Zahlen

d) einer imaginären Zahl durch eine reelle Zahl

trigonometrisch ausdrücken und wo liegt in der Zahlenebene der Punkt, welcher diesen Quotienten darstellt?

Erkl. 141. Für die Winkel aller Quadranten findet nach einem Satze der Goniometrie statt:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = +\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

Erkl. 142. Ist $\sphericalangle \varphi_2 > \sphericalangle \varphi_1$, so ist das zweite Glied des Richtungskoëffizienten (vergl. Antwort auf Frage 58) negativ (s. Erkl. 139).

Erkl. 143. Aus der Antwort auf Frage 74, a) ergibt sich folgender Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten zweier reellen Zahlen $\frac{a}{\alpha}$ ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von a und fällt mit der Achse der reellen Zahlen zusammen."

Antwort.

a) Sind Zähler und Nenner positive reelle Zahlen (z. B. $+a$ und $+\alpha$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Sind Zähler und Nenner negative reelle Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{-\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}{r_2\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Demnach liegt der Punkt des Quotienten $\frac{-a}{-\alpha}$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Ist der Zähler positiv, der Nenner negativ, so folgt:

$$\frac{+a}{-\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)}{r_2\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(0^0 - 180^0) + i\sin(0^0 - 180^0)] \quad \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(-180^0) + i\sin(-180^0)]$$

oder (nach Erkl. 141):

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos 180^0 - i\sin 180^0) \quad \text{(s. Erkl. 142)}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf der Achse der negativen reellen Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler negativ, der Nenner positiv, so folgt:

$$\frac{-a}{+\alpha} = \frac{r_1\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(180^0 - 0^0) + i\sin(180^0 - 0^0)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos 180^0 + i\sin 180^0)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 143).

b) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl (z. B. $+a$ und $+\beta i$), so erhält man:

$$\frac{+a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (0^0 - 90^0) + i \sin (0^0 - 90^0)] \quad \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0) \quad \text{(nach Erkl. 141)}$$

Erkl. 144. Aus der Antwort auf Frage 74, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine imaginäre βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von a und zu letzterem normal gerichtet, d. h. mit der Achse der imaginären Zahlen zusammenfallend."

Demnach liegt der Punkt des Quotienten von $\frac{+a}{+\beta i}$ auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} \quad \text{(nach Antwort auf Frage 59)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (-270^0) + i \sin (-270^0)] = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 - i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{-a}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{-a}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\beta}$ Einheiten (vergl. Erkl. 144).

c) Sind Zähler und Nenner positive imaginäre Zahlen, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen und ist um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Sind Zähler und Nenner negative imaginäre Zahlen, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2}$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive, der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{+bi}{-\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 - i \sin 180^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 145. Aus der Antwort auf Frage 74, c) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten zweier imaginären Zahlen $\left(\frac{bi}{\beta i}\right)$ ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und zu letzterem normal gerichtet."

Ist der Zähler eine negative, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{+\beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\beta}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vgl. Erkl. 145).

d) Ist der Zähler eine positive imaginäre und der Nenner eine positive reelle Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{+a} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven

imaginären Zahlen und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Ist der Zähler eine positive imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{+bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 - i \sin 90^0)$$

Der Punkt von $\frac{+bi}{-\alpha}$ liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine positive reelle Zahl, so folgt:

$$\frac{-bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 146. Aus der Antwort auf Frage 74, d) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine reelle Zahl α ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von bi und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine negative imaginäre und der Nenner eine negative reelle Zahl, so erhält man:

$$\frac{-bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{\alpha}$ Einheiten (vgl. Erkl. 146).

Frage 75. Wie lässt sich der Quotient:

a) einer reellen Zahl durch eine komplexe Zahl
b) einer komplexen Zahl durch eine reelle Zahl
c) einer imaginären Zahl durch eine komplexe Zahl
d) einer komplexen Zahl durch eine imaginäre Zahl

trigonometrisch und graphisch darstellen, wenn die komplexe Zahl nur positive Glieder hat? (Siehe nachfolgende Erklärung.)

Antwort.

a) Ist der Zähler eine positive reelle Zahl (z. B. $+a$), der Nenner eine komplexe Zahl (z. B. $\alpha + \beta i$), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{+a}{\alpha + \beta i} &= \frac{r_1 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2) \end{aligned}\right\} \text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Erkl. 147. Es würde zu weit führen, wollten wir hier auch alle die Fälle berücksichtigen, wo ein Glied der komplexen Zahl negativ ist oder es beide Glieder sind. Die trigonometrische und graphische Darstellung solcher Quotienten muss dem Studierenden überlassen bleiben. (Siehe übrigens die Aufgaben 57 und 58.)

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von $(360^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Erkl. 139 und 142). Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine negative reelle Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-a}{\alpha + \beta i} = \frac{r_1 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)}{r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_2) + i \sin (180^0 - \varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zum Modulus der Komplexen einen Winkel von $(180^0 - \varphi_2)$ bildenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel wachsen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ Einheiten (vergl. Erkl. 147a).

Erkl. 147a. Aus der Antwort auf Frage 75, a) folgt der Satz:

„Der Modulus (Radiusvektor) des Quotienten einer reellen Zahl a durch eine komplexe Zahl $\alpha + \beta i$ ist im Verhältnisse von 1 : (Modulus von $\alpha + \beta i$) kleiner als der Modulus von a."

b) Ist der Zähler eine komplexe Zahl (z. B. $a + bi$), der Nenner eine positive reelle Zahl (α), so folgt:

$$\frac{a + bi}{+\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 0^0 + i \sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt demnach auf dem Modulus des Zählers und zwar um $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt.

Erkl. 148. Aus der Antwort auf Frage 75, b) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a + bi$ durch eine reelle Zahl α ist gleich der α-fachen Verkleinerung des Modulus von $a + bi$ und fällt entweder mit letzterem zusammen oder bildet seine Verlängerung."

Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine negative reelle Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (\varphi_1 - 180^0) + i \sin (\varphi_1 - 180^0)]$$

oder, da $\varphi_1 < 90^0$ ist (wegen der Annahme, dass die komplexe Zahl nur positive Glieder besitzen soll):

$$\frac{a + bi}{-\alpha} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos (180^0 - \varphi_1) - i \sin (180^0 - \varphi_1)]$$

Der Punkt von $\frac{a + bi}{-\alpha}$ liegt demnach auf dem rückwärts (über den Nullpunkt hinaus) verlängerten Modulus von $a + bi$ und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha}$ Einheiten vom Nullpunkte (vergl. Erkl. 148).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

c) Ist der Zähler eine positive imaginäre Zahl und der Nenner eine komplexe Zahl, so erhält man:

$$\frac{+bi}{\alpha+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos 90^0+i\sin 90^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos 90^0-\varphi_2)+i\sin(90^0-\varphi_2)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(90^0-\varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar in einer Entfernung von $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte.

Erkl. 149. Aus der Antwort auf Frage 75, c) ergibt sich der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer imaginären Zahl bi durch eine komplexe Zahl $\alpha+\beta i$ ist im Verhältnisse von 1 : (Modulus von $\alpha+\beta i$) kleiner als der Modulus von bi."

Ist der Zähler eine negative imaginäre Zahl, der Nenner eine komplexe Zahl, so ergibt sich:

$$\frac{-bi}{\alpha+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos 270^0+i\sin 270^0)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0-\varphi_2)+i\sin(270^0-\varphi_2)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt also auf einer zur Achse der positiven reellen Zahlen unter einem Winkel von $(270^0-\varphi_2)$ geneigten Geraden und zwar um $\frac{r_1}{r_2}=\frac{b}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ Einheiten vom Nullpunkte entfernt (vergl. Erkl. 149).

d) Ist der Zähler eine komplexe Zahl, der Nenner eine positive imaginäre Zahl, so erhält man:

$$\frac{a+bi}{+\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_1\cdot(\cos 90^0+i\sin 90^0)}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-90^0)+i\sin(\varphi_1-90^0)]$$

oder, da $\varphi_1<90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{+\beta i}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(90^0-\varphi_1)-i\sin(90^0-\varphi_1)]$$

Der diesen Quotienten darstellende Punkt liegt auf einer zum Modulus des Zählers normal und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten.

Ist der Zähler eine komplexe Zahl und der Nenner eine negative imaginäre Zahl, so folgt:

$$\frac{a+bi}{-\beta i}=\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 270^0+i\sin 270^0)}=\frac{r_1}{r_1}\cdot[\cos(\varphi_1-270^0)+i\sin(\varphi_1-270^0)]$$

oder, da $\varphi_1<90^0$ ist:

$$\frac{a+bi}{-\beta i}=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(270^0-\varphi_1)-i\sin(270^0-\varphi_1)]$$

Der Punkt dieses Quotienten liegt auf einer zum Modulus der Komplexen

Erkl. 150. Aus der Antwort auf Frage 75, d) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a+bi$ durch eine imaginäre Zahl βi ist gleich der β-fachen Verkleinerung des Modul von $a+bi$ und zu letzterem normal gerichtet."

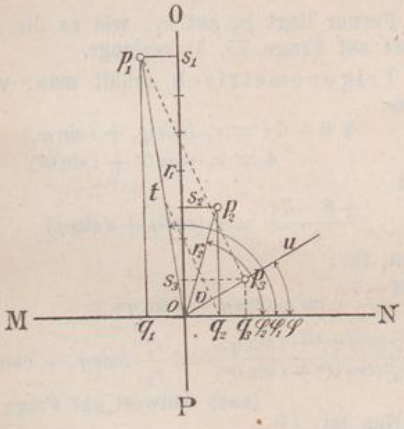
normal stehenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten (vgl. Erkl. 150).

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 57. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{-1+7i}{+1+3i}$

Figur 18.



Auflösungen.

a) (Figur 18). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = -1$, $os_1 = +7$, $oq_2 = +1$ und $os_2 = +3$ Normale auf MN bezw. OP. Ihre Schnittpunkte p_1 und p_2 stellen dann den Zähler, bezw. den Nenner des gegebenen Bruches dar. Hierauf verbinde man p_1 und p_2 mit o und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel $p_2oq_2 = \varphi_2$ des komplexen Nenners so an, dass Winkel $uoN = p_1oq_2 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot = r_2$ und $ov = oq_2 = 1$, verbinde t mit v und ziehe durch p_1 zu tv eine Parallele bis zum Schnitte mit der Geraden ou. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Quotienten dar (nach Antwort auf Frage 73).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$-1+7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$+1+3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

Erkl. 151. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{7}{-1} = -7$ ist, so liegt φ_1 im zweiten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 7{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 81^0\,50' = 6{,}9682$$
$$\text{Rest: } 318$$

Differenz für 1 Minute = 147,2. Zum Winkel $81^0\,50'$ kommen also noch:

$$\frac{318}{147{,}2} = 2\frac{59'}{368} = 2'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 180^0 - 81^0\,52'\,9'' = 98^0\,7'\,51''$$

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = 7{,}071$$
$$r_2 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$
$$\varphi_1 = 98^0\,7'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 151)}$$
$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,54'' \quad \text{(nach Erkl. 152)}$$

Folglich gibt:

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = \frac{7{,}071}{3{,}162}\cdot$$
$$[\cos(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')$$
$$+ i\sin(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')]$$
$$= 2{,}236\cdot(\cos 26^0\,33'\,57'' + i\sin 26^0\,33'\,57'')$$

Demnach ist:

$$r = 2{,}236$$

und

$$\sphericalangle\varphi = 26^0\,33'\,57''$$

---

b) $\frac{+8-7i}{4}$

Erkl. 152. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+3}{+1} = +3$ ist, so liegt φ_2 im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 3{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 71^0\,30' = 2{,}9887$$
$$\text{Rest: } 113$$

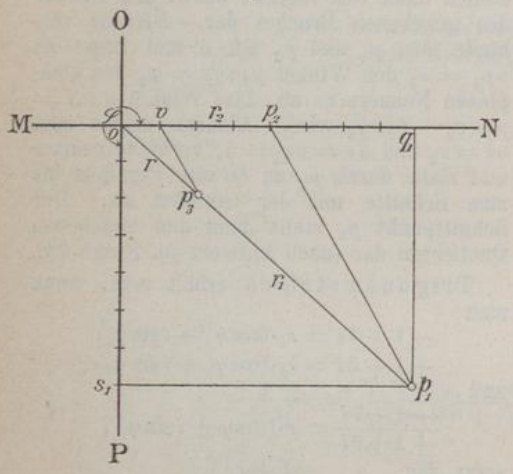
Differenz für 1 Minute = 29,1. Zum Winkel $71^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{113}{29{,}1} = 3\,\frac{257'}{291} = 3'\,53''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,53''$$

Figur 19.



Erkl. 153. Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-7}{+8} = -0{,}875$ ist, so liegt φ_1 im vierten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}87500$$
$$\operatorname{tg} 41^0\,10' = 0{,}87441$$
$$\text{Rest: } 59$$

Differenz für 1 Minute = 51,4. Zum Winkel $41^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{51{,}4} = 1\,\frac{38'}{257} = 1'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 41^0\,11'\,9'' = 318^0\,48'\,51''$$

c) $\frac{2i}{1+i}$

b) (Figur 19). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +8$ und $os_1 = -7i$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Dividendus dar. Der Punkt des Divisors liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen um 4 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_2. Man verbinde p_1 mit p_2 und ziehe durch v (den Endpunkt der Strecke $ov = 1$) zu p_1p_2 eine Parallele bis zum Schnitte mit $op_1 = r_1$. Der Schnittpunkt p_3 ist dann der gesuchte Punkt des gegebenen Quotienten. Denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$ov : op_2 = op_3 : op_1$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

oder:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt p_3 auf r_1, wie es die Antwort auf Frage 75, b) verlangt.

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$+8-7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$4 = r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

und

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 71)

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{8^2+7^2} = \sqrt{113} = 10{,}630$$
$$r_2 = 4$$

und

$$\varphi_1 = 318^0\,48'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 153)}$$

folglich gibt:

$$\frac{+8-7i}{4} = \frac{10{,}630}{4}\cdot$$
$$(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$
$$= 2{,}658\cdot(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 2{,}658\cdot(\cos 41'\,11'\,9'' - i\sin 41^0\,11'\,9'')$$

Demnach ist:

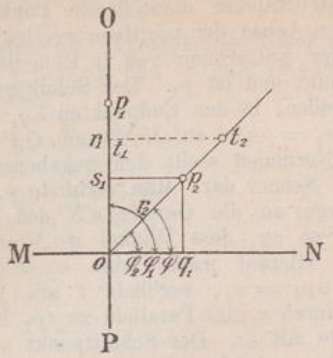
$$r = 2{,}658$$

und

$$\varphi = \varphi_1 = 318^0\,48'\,51''$$

c) (Figur 20). Der den Dividendus darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen in einer Entfernung von 2 Einheiten vom Nullpunkt und ist p_1. Der Schnittpunkt p_2 der beiden, in

Figur 20.



den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Divisor dar. Man verbinde p_2 mit o, lege den Winkel $p_2 o q_1 = \varphi_2$ an $p_1 o$ so an, dass der Winkel $\varphi = 90^0 - \varphi_2$ wird. (Im vorliegenden Beispiele fällt der neue Schenkel des Winkels φ mit dem Schenkel op_2 des Winkels φ_2 zusammen. Es ist demnach $\varphi = \varphi_2$.) Hierauf mache man $ot_1 = r_2$ und $ot_2 = r_1$, verbinde t_1 mit t_2 und ziehe durch s_1 (den Endpunkt der Strecke $os_1 = 1$) eine Parallele bis zum Schnitte mit ot_2. (Im vorliegenden Beispiele fällt diese Parallele mit $s_1 p_2$ zusammen.) Der Schnittpunkt p_2 stellt den Quotienten $\frac{2i}{1+i}$ dar, denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$os_1 : ot_1 = op_2 : ot_2$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt der Punkt des Quotienten auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel $(90^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Antwort auf Frage 75, c).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$2i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$
$$1 + i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(90^0 - \varphi_2) + i \sin(90^0 - \varphi_2)] \Big\} \text{ (nach Antwort auf Frage 71)}$$

Nun ist:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_2 = 45^0 \quad \text{(nach Erkl. 154)}$$

folglich gibt:

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2}{1{,}414} \cdot [\cos(90^0 - 45^0) + i \sin(90^0 - 45^0)]$$

oder:

$$= 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Demnach ist:

$$r = 1{,}414$$

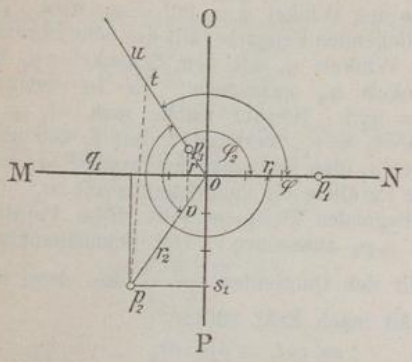
und

$$\varphi = 45^0$$

Erkl. 154. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt φ_2 im ersten Quadranten und ist $= 45^0$.

d) $\dfrac{3}{-2-3i}$

Figur 21.



Erkl. 155. Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{-3}{-2} = +1{,}5$ ist, so liegt φ_2 im dritten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest: } 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 + 56^0\,18'\,37'' = 236^0\,18'\,37''$$

d) (Figur 21). Der den Zähler des gegebenen Bruches darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von 3 Einheiten vom Nullpunkt und ist p_1. Der Schnittpunkt p_2 der beiden, in den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Nenner dar. Man verbinde p_2 mit o und lege an die Gerade oN den Winkel p_1op_2 so an, dass Winkel $uoN = Nop_2$ wird. Hierauf mache man $ov = 1$ und $ot = op_1 = r_1$, verbinde t mit p_2 und ziehe durch v eine Parallele zu tp_2 bis zum Schnitte mit ot. Der Schnittpunkt p_3 stellt dann den gegebenen Bruch dar. Denn nach Erkl. 126 findet statt:

$$ov : op_2 = op_3 : ot$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle 0^0 - \sphericalangle\varphi_2$$

Demnach ist p_3 der Punkt der Komplexen:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(0^0 - \varphi_2) + i\sin(0^0 - \varphi_2)]$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \quad \Big\} \text{ (siehe Antwort auf Frage 75, a)}$$

Trigonometrisch erhält man, da:

$$3 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$
$$-2-3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist, für:

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

Nun ist:

$$r_1 = 3$$
$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 236^0\,18'\,37'' \quad \text{(nach Erkl. 155)}$$

folglich gibt:

$$\frac{3}{-2-3i} = \frac{3}{3{,}606}\cdot(\cos 236^0\,18'\,37'' - i\sin 236^0\,18'\,37'')$$

oder:

$$= 0{,}832\,(-\cos 56^0\,18'\,37'' + i\sin 56^0\,18'\,37'') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$

Demnach ist:

$$r = 0{,}832$$

und es bildet dieser Modulus mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von:

$$180^0 - 56^0\,18'\,37'' = 123^0\,41'\,23''$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 58. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{2+5i}{1-4i}$

b) $\frac{+2+i}{-4i}$

c) $\frac{1}{-3-4i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 57, a).

b) Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf die Fragen 73 und 75, d).

c) Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf die Fragen 72 und 73.

4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren.

Frage 76. Wie lässt sich die Potenz einer komplexen Zahl trigonometrisch darstellen, wenn der Exponent:

a) eine positive,

b) eine negative,

ganze und reelle Zahl ist?

Antwort.

a) Es sei der Potenzexponent n eine positive, ganze und reelle Zahl, und die komplexe Zahl:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann erhält man für:

$$(a+bi)^2 = [r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder (nach Antwort auf Frage 67):

$$= r^2\cdot[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)]$$

d. i.:

$$(a+bi)^2 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Multipliziert man $(a+bi)^2$ mit $(a+bi)$, so ergibt sich:

$$(a+bi)^3 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder:

$$= r^3\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

Erkl. 156. Die zur Berechnung der Potenzen komplexer Zahlen dienende Formel:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

wird nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Moivre, die „Moivresche Formel" und das in ihr liegende Gesetz der „Moivresche Satz" genannt.

Setzt man die Multiplikation mit $(a+bi)$ fort, so erhält man:

$$(a+bi)^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

oder ganz allgemein:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(vergl. Erkl. 156)

b) Ist n eine negative, ganze und reelle Zahl, so hat man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n}$$

oder (nach vorstehender Antwort):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg