Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

# Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

**Erkl. 150.** Aus der Antwort auf Frage 75, d) folgt der Satz:

„Der Modulus des Quotienten einer komplexen Zahl $a+bi$ durch eine imaginäre Zahl $\beta i$ ist gleich der $\beta$-fachen Verkleinerung des Modul von $a+bi$ und zu letzterem normal gerichtet."

normal stehenden und nach der Seite hin geneigten Geraden, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen. Seine Entfernung vom Nullpunkte beträgt $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\beta}$ Einheiten (vgl. Erkl. 150).

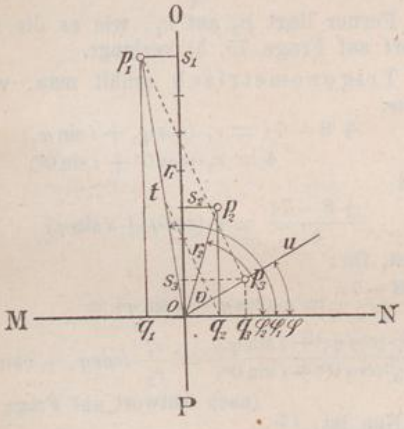
---

## α) Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 57.** Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{-1+7i}{+1+3i}$

Figur 18.




**Auflösungen.**

a) (Figur 18). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = -1$, $os_1 = +7$, $oq_2 = +1$ und $os_2 = +3$ Normale auf $MN$ bezw. $OP$. Ihre Schnittpunkte $p_1$ und $p_2$ stellen dann den Zähler, bezw. den Nenner des gegebenen Bruches dar. Hierauf verbinde man $p_1$ und $p_2$ mit $o$ und trage an $op_1 = r_1$ den Winkel $p_2oq_2 = \varphi_2$ des komplexen Nenners so an, dass Winkel $uoN = p_1oq_2 - p_2oq_2$ wird. Alsdann mache man $ot = r_2$ und $ov = oq_2 = 1$, verbinde $t$ mit $v$ und ziehe durch $p_1$ zu $tv$ eine Parallele bis zum Schnitte mit der Geraden $ou$. Der Schnittpunkt $p_3$ stellt dann den gegebenen Quotienten dar (nach Antwort auf Frage 73).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$-1+7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$+1+3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1+7i}{+1+3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) &= \frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}\\ &= \frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]\end{aligned}\right\}\text{(nach Antwort auf Frage 71)}$$

**Erkl. 151.** Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{7}{-1} = -7$ ist, so liegt $\varphi_1$ im zweiten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 7{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 81^0\,50' = 6{,}9682$$
$$\text{Rest: } 318$$

Differenz für 1 Minute = 147,2. Zum Winkel $81^0\,50'$ kommen also noch:

$$\frac{318}{147{,}2} = 2\frac{59'}{368} = 2'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 180^0 - 81^0\,52'\,9'' = 98^0\,7'\,51''$$

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{50} = 7{,}071$$
$$r_2 = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} = 3{,}162$$
$$\varphi_1 = 98^0\,7'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 151)}$$
$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,54'' \quad \text{(nach Erkl. 152)}$$

Folglich gibt:

$$\frac{-1+7i}{+1+3i} = \frac{7{,}071}{3{,}162}\cdot$$
$$[\cos(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')$$
$$+ i\sin(98^0\,7'\,51'' - 71^0\,33'\,54'')]$$
$$= 2{,}236\cdot(\cos 26^0\,33'\,57'' + i\sin 26^0\,33'\,57'')$$

Demnach ist:

$$r = 2{,}236$$

und

$$\sphericalangle\varphi = 26^0\,33'\,57''$$

---

b) $\frac{+8-7i}{4}$

**Erkl. 152.** Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+3}{+1} = +3$ ist, so liegt $\varphi_2$ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 3{,}0000$$
$$\operatorname{tg} 71^0\,30' = 2{,}9887$$
$$\text{Rest: } 113$$

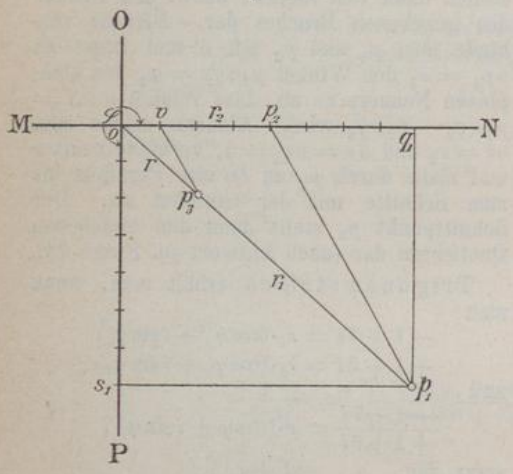
Differenz für 1 Minute = 29,1. Zum Winkel $71^0\,30'$ kommen also noch:

$$\frac{113}{29{,}1} = 3\,\frac{257'}{291} = 3'\,53''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 71^0\,33'\,53''$$

Figur 19.




**Erkl. 153.** Da $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{-7}{+8} = -0{,}875$ ist, so liegt $\varphi_1$ im vierten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 0{,}87500$$
$$\operatorname{tg} 41^0\,10' = 0{,}87441$$
$$\text{Rest: } 59$$

Differenz für 1 Minute = 51,4. Zum Winkel $41^0\,10'$ kommt also noch:

$$\frac{59}{51{,}4} = 1\,\frac{38'}{257} = 1'\,9''$$

Mithin ist:

$$\varphi_1 = 360^0 - 41^0\,11'\,9'' = 318^0\,48'\,51''$$

c) $\frac{2i}{1+i}$

b) (Figur 19). Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +8$ und $os_1 = -7i$ auf $MN$ bezw. $OP$ Normale; ihr Schnittpunkt $p_1$ stellt dann den gegebenen Dividendus dar. Der Punkt des Divisors liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen um 4 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist $p_2$. Man verbinde $p_1$ mit $p_2$ und ziehe durch $v$ (den Endpunkt der Strecke $ov = 1$) zu $p_1p_2$ eine Parallele bis zum Schnitte mit $op_1 = r_1$. Der Schnittpunkt $p_3$ ist dann der gesuchte Punkt des gegebenen Quotienten. Denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$ov : op_2 = op_3 : op_1$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

oder:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt $p_3$ auf $r_1$, wie es die Antwort auf Frage 75, b) verlangt.

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$+8-7i = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$4 = r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$

und

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{+8-7i}{4} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$\frac{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

(nach Antwort auf Frage 71)

Nun ist:

$$r_1 = \sqrt{8^2+7^2} = \sqrt{113} = 10{,}630$$
$$r_2 = 4$$

und

$$\varphi_1 = 318^0\,48'\,51'' \quad \text{(nach Erkl. 153)}$$

folglich gibt:

$$\frac{+8-7i}{4} = \frac{10{,}630}{4}\cdot$$
$$(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$
$$= 2{,}658\cdot(\cos 318^0\,48'\,51'' + i\sin 318^0\,48'\,51'')$$

oder (nach Erkl. 101):

$$= 2{,}658\cdot(\cos 41'\,11'\,9'' - i\sin 41^0\,11'\,9'')$$

Demnach ist:

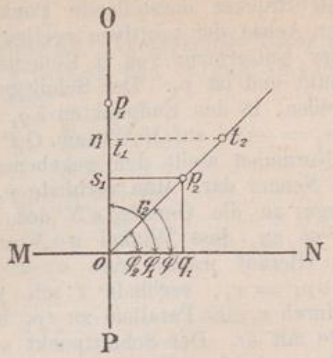
$$r = 2{,}658$$

und

$$\varphi = \varphi_1 = 318^0\,48'\,51''$$

c) (Figur 20). Der den Dividendus darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven imaginären Zahlen in einer Entfernung von 2 Einheiten vom Nullpunkt und ist $p_1$. Der Schnittpunkt $p_2$ der beiden, in

Figur 20.




den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf $MN$ bezw. $OP$ errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Divisor dar. Man verbinde $p_2$ mit $o$, lege den Winkel $p_2 o q_1 = \varphi_2$ an $p_1 o$ so an, dass der Winkel $\varphi = 90^0 - \varphi_2$ wird. (Im vorliegenden Beispiele fällt der neue Schenkel des Winkels $\varphi$ mit dem Schenkel $op_2$ des Winkels $\varphi_2$ zusammen. Es ist demnach $\varphi = \varphi_2$.) Hierauf mache man $ot_1 = r_2$ und $ot_2 = r_1$, verbinde $t_1$ mit $t_2$ und ziehe durch $s_1$ (den Endpunkt der Strecke $os_1 = 1$) eine Parallele bis zum Schnitte mit $ot_2$. (Im vorliegenden Beispiele fällt diese Parallele mit $s_1 p_2$ zusammen.) Der Schnittpunkt $p_2$ stellt den Quotienten $\frac{2i}{1+i}$ dar, denn man erhält (nach Erkl. 126):

$$os_1 : ot_1 = op_2 : ot_2$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner liegt der Punkt des Quotienten auf einer Geraden, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel $(90^0 - \varphi_2)$ einschliesst (siehe Antwort auf Frage 75, c).

Trigonometrisch erhält man, wenn man:

$$2i = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$$
$$1 + i = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

setzt, für:

$$\frac{2i}{1+i} = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = \frac{r_1 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)}$$

oder:

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(90^0 - \varphi_2) + i \sin(90^0 - \varphi_2)] \Big\} \text{ (nach Antwort auf Frage 71)}$$

Nun ist:

$$r_1 = 2$$
$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi_2 = 45^0 \quad \text{(nach Erkl. 154)}$$

folglich gibt:

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2}{1{,}414} \cdot [\cos(90^0 - 45^0) + i \sin(90^0 - 45^0)]$$

oder:

$$= 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$$

Demnach ist:

$$r = 1{,}414$$

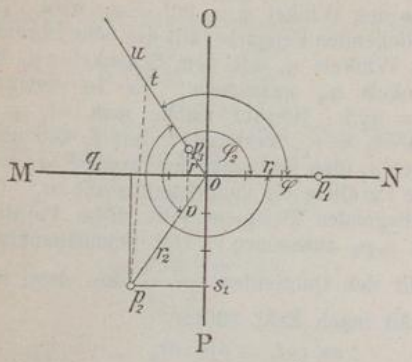
und

$$\varphi = 45^0$$

**Erkl. 154.** Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, so liegt $\varphi_2$ im ersten Quadranten und ist $= 45^0$.

d) $\dfrac{3}{-2-3i}$

Figur 21.




**Erkl. 155.** Da $\operatorname{tg}\varphi_2 = \dfrac{-3}{-2} = +1{,}5$ ist, so liegt $\varphi_2$ im dritten Quadranten (nach Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = 1{,}5000$$
$$\operatorname{tg} 56^0\,10' = 1{,}4919$$
$$\text{Rest: } 81$$

Differenz für 1 Minute = 9,4. Zum Winkel $56^0\,10'$ kommen also noch:

$$\frac{81}{9{,}4} = 8\,\frac{29'}{47} = 8'\,37''$$

Mithin ist:

$$\varphi_2 = 180^0 + 56^0\,18'\,37'' = 236^0\,18'\,37''$$

d) (Figur 21). Der den Zähler des gegebenen Bruches darstellende Punkt liegt auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung von 3 Einheiten vom Nullpunkt und ist $p_1$. Der Schnittpunkt $p_2$ der beiden, in den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ auf $MN$ bezw. $OP$ errichteten Normalen stellt den gegebenen komplexen Nenner dar. Man verbinde $p_2$ mit $o$ und lege an die Gerade $oN$ den Winkel $p_1op_2$ so an, dass Winkel $uoN = Nop_2$ wird. Hierauf mache man $ov = 1$ und $ot = op_1 = r_1$, verbinde $t$ mit $p_2$ und ziehe durch $v$ eine Parallele zu $tp_2$ bis zum Schnitte mit $ot$. Der Schnittpunkt $p_3$ stellt dann den gegebenen Bruch dar. Denn nach Erkl. 126 findet statt:

$$ov : op_2 = op_3 : ot$$

oder:

$$1 : r_2 = r : r_1$$

d. i.:

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle\varphi = \sphericalangle 0^0 - \sphericalangle\varphi_2$$

Demnach ist $p_3$ der Punkt der Komplexen:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(0^0 - \varphi_2) + i\sin(0^0 - \varphi_2)]$$

oder:

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) \quad \Big\} \text{ (siehe Antwort auf Frage 75, a)}$$

Trigonometrisch erhält man, da:

$$3 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1\cdot(\cos 0^0 + i\sin 0^0)$$
$$-2-3i = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

und

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ist, für:

$$\frac{3}{-2-3i} = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$$

Nun ist:

$$r_1 = 3$$
$$r_2 = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

und

$$\varphi_2 = 236^0\,18'\,37'' \quad \text{(nach Erkl. 155)}$$

folglich gibt:

$$\frac{3}{-2-3i} = \frac{3}{3{,}606}\cdot(\cos 236^0\,18'\,37'' - i\sin 236^0\,18'\,37'')$$

oder:

$$= 0{,}832\,(-\cos 56^0\,18'\,37'' + i\sin 56^0\,18'\,37'') \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$

Demnach ist:

$$r = 0{,}832$$

und es bildet dieser Modulus mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel von:

$$180^0 - 56^0\,18'\,37'' = 123^0\,41'\,23''$$

### β) Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 58.** Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{2+5i}{1-4i}$

b) $\frac{+2+i}{-4i}$

c) $\frac{1}{-3-4i}$

**Andeutungen.**

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 57, a).

b) Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf die Fragen 73 und 75, d).

c) Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf die Fragen 72 und 73.

## 4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren.

**Frage 76.** Wie lässt sich die Potenz einer komplexen Zahl trigonometrisch darstellen, wenn der Exponent:

a) eine positive,

b) eine negative,

ganze und reelle Zahl ist?

**Antwort.**

a) Es sei der Potenzexponent $n$ eine positive, ganze und reelle Zahl, und die komplexe Zahl:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann erhält man für:

$$(a+bi)^2 = [r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder (nach Antwort auf Frage 67):

$$= r^2\cdot[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)]$$

d. i.:

$$(a+bi)^2 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Multipliziert man $(a+bi)^2$ mit $(a+bi)$, so ergibt sich:

$$(a+bi)^3 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder:

$$= r^3\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

**Erkl. 156.** Die zur Berechnung der Potenzen komplexer Zahlen dienende Formel:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

wird nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Moivre, die „Moivresche Formel" und das in ihr liegende Gesetz der „Moivresche Satz" genannt.

Setzt man die Multiplikation mit $(a+bi)$ fort, so erhält man:

$$(a+bi)^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

oder ganz allgemein:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(vergl. Erkl. 156)

b) Ist $n$ eine negative, ganze und reelle Zahl, so hat man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n}$$

oder (nach vorstehender Antwort):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg