Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 58. Nachfolgende Quotienten sind graphisch und trigonometrisch darzustellen:

a) $\frac{2+5i}{1-4i}$

b) $\frac{+2+i}{-4i}$

c) $\frac{1}{-3-4i}$

Andeutungen.

a) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 57, a).

b) Die Auflösung geschieht nach der Antwort auf die Fragen 73 und 75, d).

c) Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf die Fragen 72 und 73.

4) Ueber das graphische und trigonometrische Potenzieren.

Frage 76. Wie lässt sich die Potenz einer komplexen Zahl trigonometrisch darstellen, wenn der Exponent:

a) eine positive,

b) eine negative,

ganze und reelle Zahl ist?

Antwort.

a) Es sei der Potenzexponent n eine positive, ganze und reelle Zahl, und die komplexe Zahl:

$$a+bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Dann erhält man für:

$$(a+bi)^2 = [r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder (nach Antwort auf Frage 67):

$$= r^2\cdot[\cos(\varphi+\varphi) + i\sin(\varphi+\varphi)]$$

d. i.:

$$(a+bi)^2 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

Multipliziert man $(a+bi)^2$ mit $(a+bi)$, so ergibt sich:

$$(a+bi)^3 = r^2\cdot(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

oder:

$$= r^3\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

Erkl. 156. Die zur Berechnung der Potenzen komplexer Zahlen dienende Formel:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

wird nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Moivre, die „Moivresche Formel" und das in ihr liegende Gesetz der „Moivresche Satz" genannt.

Setzt man die Multiplikation mit $(a+bi)$ fort, so erhält man:

$$(a+bi)^4 = r^4\cdot(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

oder ganz allgemein:

$$(a+bi)^n = r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

(vergl. Erkl. 156)

b) Ist n eine negative, ganze und reelle Zahl, so hat man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

und

$$[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = \frac{1}{[r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n}$$

oder (nach vorstehender Antwort):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n\cdot(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Multipliziert man den Zähler und den Nenner dieses Bruches mit dem Konjugierten des Nenners, also mit:

$$r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

so erhält man:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \cdot r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}$$

oder, wenn man die beiden Klammerausdrücke im Nenner miteinander multipliziert:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)}{r^n \cdot r^n \cdot (\cos^2 n\varphi + i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i \sin n\varphi \cdot \cos n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder gekürzt:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{\cos n\varphi - i \sin n\varphi}{r^n \cdot (\cos^2 n\varphi - i^2 \cdot \sin^2 n\varphi)}$$

oder, da:

$$-i^2 = +1$$

und

$$\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = +1$$

ist (nach Erkl. 130):

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi)$$

Bedenkt man, dass:

$$\cos n\varphi = \cos(-n\varphi)$$
$$-\sin n\varphi = +\sin(-n\varphi)$$

ist (nach Erkl. 141), so kann man auch schreiben:

$$(a+bi)^{-n} = \frac{1}{r^n} \cdot [\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)]$$

Aus Vorstehendem folgt der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird mit einem ganzen und reellen Exponenten potenziert, indem man ihren Modulus potenziert und die Amplitude mit dem Potenzexponenten multipliziert.“ (Vergl. Erkl. 157.)

Erkl. 157. Der Moivresche Satz hat nicht nur für positive, sondern auch, wie aus der Antwort auf Frage 76, b) hervorgeht, für negative, ganze und reelle Potenzexponenten Gültigkeit (siehe auch Erkl. 159).

Frage 77. Welche Beziehungen finden zwischen den gleich hohen Potenzen zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Ist:

$$a + bi = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

so ist:

$$a - bi = r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$(a+bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi + i r^n \cdot \sin n\varphi$$

und

$$(a-bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) = r^n \cdot \cos n\varphi - i r^n \cdot \sin n\varphi$$

Setzt man für:

$$r^n \cdot \cos n\varphi = A$$

und für:

$$r^n \cdot \sin n\varphi = B$$

so erhält man:

$$(a+bi)^n = A+Bi$$

und

$$(a-bi)^n = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Konjugierte komplexe Zahlen, mit derselben reellen Ganzzahl potenziert, geben konjugierte Werte."

Frage 78. Wie lässt sich die Potenz einer rein imaginären Zahl trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach Antwort auf Frage 76 ist:

$$(a+bi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Wird $a = o$, so ist:

$$r = b \text{ und } \sphericalangle \varphi = 90^0$$

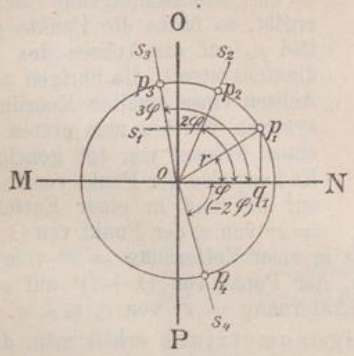
(nach Antwort auf Frage 59)

Demnach erhält man für:

$$(bi)^n = b^n \cdot (\cos n \cdot 90^0 + i \sin n \cdot 90^0)$$

Frage 79. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Potenz einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt, wenn der Exponent eine reelle Ganzzahl ist?

Figur 22.



Erkl. 158. Aus nebenstehender Antwort geht hervor, dass die Potenzierung einer komplexen Zahl gleichbedeutend ist mit der Multiplikation ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Antwort. (Figur 22.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +a$ und $os_1 = +bi$ auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt stellt dann die Grundzahl der gegebenen Potenz dar. Hierauf verbinde man p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen Kreisbogen. Alsdann trage man den zum Winkel $p_1 o q_1 = \varphi$ gehörenden Bogen pp_1 von p aus so oft, als der Exponent Einheiten besitzt, und, falls der Exponent positiv ist, nach der Richtung ab, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen; falls er jedoch negativ ist, nach entgegengesetzter Richtung ab.

Dann liegt der Punkt, welcher $(a+bi)^2$ darstellt, auf der Geraden os_2, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen den Winkel 2φ einschliesst, und zwar in einer Entfernung $= r^2$ vom Nullpunkte. Ist $r = 1$, so ist p_2 der Punkt von $(a+bi)^2$.

Der die Potenz $(a+bi)^{-2}$ darstellende Punkt liegt auf der Geraden os_4, welche mit der Achse der positiven reellen Zahlen einen Winkel (-2φ) einschliesst, und ist vom Nullpunkte um

$\frac{1}{r^2}$ Einheiten entfernt. Ist $r = 1$, so ist p_4 der Punkt dieser Potenz.

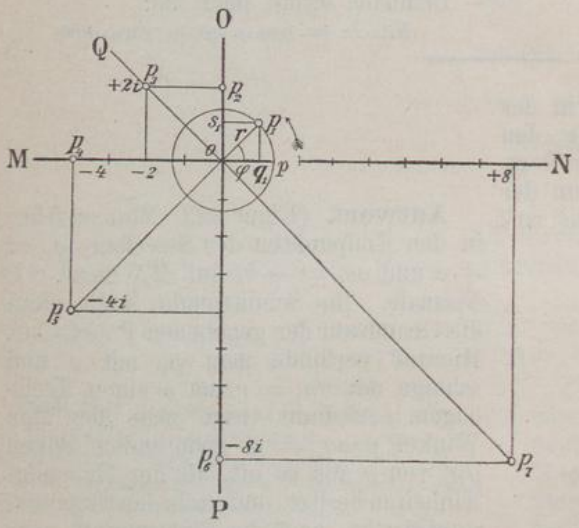
Der Punkt, welcher $(a + bi)^3$ darstellt, befindet sich auf der Geraden os_3 und ist vom Nullpunkte um r^3 Einheiten entfernt. Der Winkel s_3op ist 3φ. Ist $r = 1$, so stellt Punkt p_3 $(a + bi)^3$ dar.

Und so fort.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Es sind die ersten 7 Potenzen von $(1 + i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 23.



Auflösung. (Figur 23.) Die in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen schneiden sich in p_1, welcher Punkt demnach die Grundzahl der Potenz darstellt. — Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis, auf welchem man die Länge des Bogens vom Winkel $p_1op = \varphi$ von p aus 7 mal (oder von p_1 aus 6 mal) nach der Richtung aufzutragen hat, nach welcher die Neigungswinkel wachsen, weil der Potenzexponent positiv ist. Da $\varphi = 45^0$, wie nachfolgende Rechnung ergibt, so fallen die Punkte p_2, p_4 und p_6 auf die Achsen des Koordinatensystems, die übrigen auf die Achsen eines zweiten Koordinatensystems, welches zum ersten unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist. Es liegt also der Punkt von $(1 + i)^2$ auf oO und in einer Entfernung $= r^2$ von o, der Punkt von $(1 + i)^3$ auf oQ in einer Entfernung $= r^3$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(1 + i)^4$ auf oM in einer Entfernung $= r^4$ von o, u. s. w.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi = 45^0$$

weil $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, für:

$(1 + i)^1 = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$, dargestellt durch p_1;

$(1 + i)^2 = 1{,}414^2 \cdot (\cos 2 \cdot 45^0 + i \sin 2 \cdot 45^0)$ (nach Antwort auf Frage 76, a)

$= 2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$, dargestellt durch p_2;

$(1 + i)^3 = 1{,}414^3 \cdot (\cos 3 \cdot 45^0 + i \sin 3 \cdot 45^0)$

$= 2{,}828 \cdot (\cos 135^0 + i \sin 135^0)$, dargestellt durch p_3;

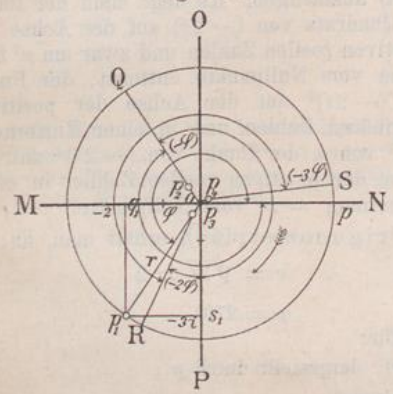
$(1 + i)^4 = 1{,}414^4 \cdot (\cos 4 \cdot 45^0 + i \sin 4 \cdot 45^0)$

$= 4 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$, dargestellt durch p_4;

$$(1+i)^5 = 1{,}414^5 \cdot (\cos 5 \cdot 45^0 + i \sin 5 \cdot 45^0)$$
$$= 5{,}656 \cdot (\cos 225^0 + i \sin 225^0), \text{ dargestellt durch } p_5;$$
$$(1+i)^6 = 1{,}414^6 \cdot (\cos 6 \cdot 45^0 + i \sin 6 \cdot 45^0)$$
$$= 8 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_6;$$
$$(1+i)^7 = 1{,}414^7 \cdot (\cos 7 \cdot 45^0 + i \sin 7 \cdot 45^0)$$
$$= 11{,}312 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0), \text{ dargestellt durch } p_7.$$

Aufgabe 60. Es sind die ersten 3 Potenzen von $(-2-3i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Figur 24.



Auflösung. (Figur 24.) In den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ errichte man auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann $(-2-3i)$ oder $(-2-3i)^{+1}$ dar. Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis. Auf diesem trage man die Länge des Bogens vom Winkel $pop_1 = \varphi$ von p aus nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen (weil der Exponent negativ ist), dreimal ab. Dann ist der Winkel:

$$poQ = -\varphi$$
$$poR = poQ + QoR = -2\varphi$$
und $$poS = poQ + QoR + RoS = -3\varphi$$

Mithin liegt der Punkt von $(-2-3i)^{-1}$ auf der Geraden oQ und zwar in einer Entfernung $= \frac{1}{r}$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(-2-3i)^{-2}$ auf der Geraden oR in einer Entfernung von $\frac{1}{r^2}$ von o und der Punkt von $(-2-3i)^{-3}$ auf oS in einer Entfernung von $\frac{1}{r^3}$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$
und
$$\varphi = 236^0\ 18'\ 37'' \quad \text{(nach Erkl. 159)}$$
ist, für:

$$(-2-3)^{-1} = \frac{1}{3{,}606} \cdot (\cos 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 236^0\ 18'\ 37'') \quad \text{(nach Antwort auf Frage 76, b)}$$
oder: $$= 0{,}277 \cdot (\cos 123^0\ 41'\ 23'' + i \sin 123^0\ 41'\ 23'') \quad \text{(nach Erkl. 139), dargestellt durch } p_2;$$

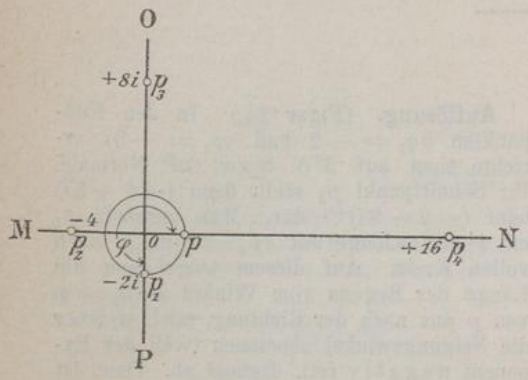
$$(-2-3)^{-2} = \frac{1}{3{,}606^2} \cdot (\cos 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 472^0\ 37'\ 14'' - i \sin 472^0\ 37'\ 14'')$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 112^0\ 37'\ 14'' - i \sin 112^0\ 37'\ 14'') \quad \text{(nach Erkl. 131)}$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 247^0\ 22'\ 46'' + i \sin 247^0\ 22'\ 46''), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2-3)^{-3} = \frac{1}{3{,}606^3} \cdot (\cos 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= 0{,}021 \cdot (\cos 708^0\ 55'\ 51'' - i \sin 708^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 348^0\ 55'\ 51'' - i \sin 348^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 11^0\ 4'\ 9'' + i \sin 11^0\ 4'\ 9''), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Aufgabe 61. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(-2i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 25.



Auflösung. (Figur 25.) Der Punkt, welcher die Grundzahl der gegebenen Potenz darstellt, liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen um 2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_1. Die Amplitude von $-2i$ ist $\varphi = 270^0$. Da der Exponent positiv ist, so ist von p aus auf dem mit dem Radius $op_1 = r$ beschriebenen Kreis nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen, der Bogen des Winkels von 270^0 4mal (oder von p_1 aus 3mal) abzutragen. Es liegt dann der Punkt des Quadrats von $(-2i)$ auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um r^2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt, der Punkt von $(-2i)^3$ auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und in einer Entfernung $= r^3$ von o, der Punkt von $(-2i)^4$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung $= r^4$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2} = 2$$

und

$$\varphi = 270^0$$

ist, für:

$$(-2i)^1 = 2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_1;$$

$$(-2i)^2 = 2^2\cdot(\cos 2\cdot 270^0 + i \sin 2\cdot 270^0)$$
$$= 4\cdot(\cos 540^0 + i \sin 540^0)$$
oder: $$= 4\cdot(\cos 180^0 + i \sin 180^0) \text{ (nach Erkl. 131), dargestellt durch } p_2;$$

$$(-2i)^3 = 2^3\cdot(\cos 3\cdot 270^0 + i \sin 3\cdot 270^0)$$
$$= 8\cdot(\cos 810^0 + i \sin 810^0)$$
oder: $$= 8\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2i)^4 = 2^4\cdot(\cos 4\cdot 270^0 + i \sin 4\cdot 270^0)$$
$$= 16\cdot(\cos 1080^0 + i \sin 1080^0)$$
oder: $$= 16\cdot(\cos 0^0 + i \sin 0^0), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Es sind die ersten 5 Potenzen von $(2-i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 59.

Aufgabe 63. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(+1{,}5i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf Frage 78 und mit Berücksichtigung der Aufgabe 60.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg