Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

$\frac{1}{r^2}$ Einheiten entfernt. Ist $r = 1$, so ist p_4 der Punkt dieser Potenz.

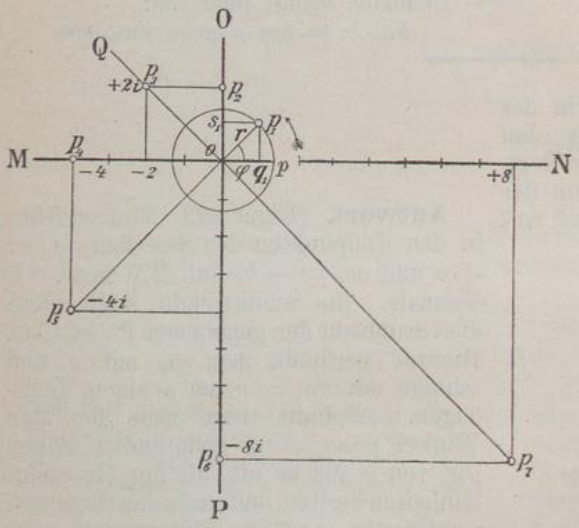
Der Punkt, welcher $(a + bi)^3$ darstellt, befindet sich auf der Geraden os_3 und ist vom Nullpunkte um r^3 Einheiten entfernt. Der Winkel s_3op ist 3φ. Ist $r = 1$, so stellt Punkt p_3 $(a + bi)^3$ dar.

Und so fort.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 59. Es sind die ersten 7 Potenzen von $(1 + i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 23.



Auflösung. (Figur 23.) Die in den Endpunkten der Strecken $oq_1 = +1$ und $os_1 = +i$ auf MN bezw. OP errichteten Normalen schneiden sich in p_1, welcher Punkt demnach die Grundzahl der Potenz darstellt. — Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis, auf welchem man die Länge des Bogens vom Winkel $p_1op = \varphi$ von p aus 7 mal (oder von p_1 aus 6 mal) nach der Richtung aufzutragen hat, nach welcher die Neigungswinkel wachsen, weil der Potenzexponent positiv ist. Da $\varphi = 45^0$, wie nachfolgende Rechnung ergibt, so fallen die Punkte p_2, p_4 und p_6 auf die Achsen des Koordinatensystems, die übrigen auf die Achsen eines zweiten Koordinatensystems, welches zum ersten unter einem Winkel von 45^0 geneigt ist. Es liegt also der Punkt von $(1 + i)^2$ auf oO und in einer Entfernung $= r^2$ von o, der Punkt von $(1 + i)^3$ auf oQ in einer Entfernung $= r^3$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(1 + i)^4$ auf oM in einer Entfernung $= r^4$ von o, u. s. w.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$$

und

$$\varphi = 45^0$$

weil $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+1}{+1} = +1$ ist, für:

$(1 + i)^1 = 1{,}414 \cdot (\cos 45^0 + i \sin 45^0)$, dargestellt durch p_1;

$(1 + i)^2 = 1{,}414^2 \cdot (\cos 2 \cdot 45^0 + i \sin 2 \cdot 45^0)$ (nach Antwort auf Frage 76, a)

$= 2 \cdot (\cos 90^0 + i \sin 90^0)$, dargestellt durch p_2;

$(1 + i)^3 = 1{,}414^3 \cdot (\cos 3 \cdot 45^0 + i \sin 3 \cdot 45^0)$

$= 2{,}828 \cdot (\cos 135^0 + i \sin 135^0)$, dargestellt durch p_3;

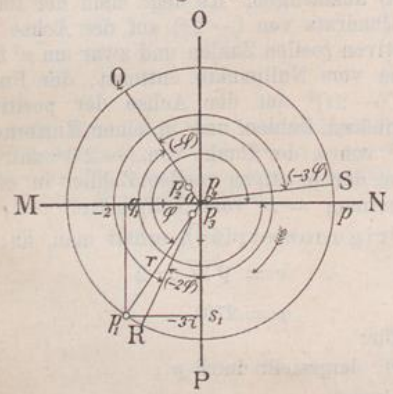
$(1 + i)^4 = 1{,}414^4 \cdot (\cos 4 \cdot 45^0 + i \sin 4 \cdot 45^0)$

$= 4 \cdot (\cos 180^0 + i \sin 180^0)$, dargestellt durch p_4;

$$(1+i)^5 = 1{,}414^5 \cdot (\cos 5 \cdot 45^0 + i \sin 5 \cdot 45^0)$$
$$= 5{,}656 \cdot (\cos 225^0 + i \sin 225^0), \text{ dargestellt durch } p_5;$$
$$(1+i)^6 = 1{,}414^6 \cdot (\cos 6 \cdot 45^0 + i \sin 6 \cdot 45^0)$$
$$= 8 \cdot (\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_6;$$
$$(1+i)^7 = 1{,}414^7 \cdot (\cos 7 \cdot 45^0 + i \sin 7 \cdot 45^0)$$
$$= 11{,}312 \cdot (\cos 315^0 + i \sin 315^0), \text{ dargestellt durch } p_7.$$

Aufgabe 60. Es sind die ersten 3 Potenzen von $(-2-3i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Figur 24.



Auflösung. (Figur 24.) In den Endpunkten $oq_1 = -2$ und $os_1 = -3i$ errichte man auf MN bezw. OP Normale. Ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann $(-2-3i)$ oder $(-2-3i)^{+1}$ dar. Man verbinde p_1 mit o und schlage mit $op_1 = r$ um o einen vollen Kreis. Auf diesem trage man die Länge des Bogens vom Winkel $pop_1 = \varphi$ von p aus nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel abnehmen (weil der Exponent negativ ist), dreimal ab. Dann ist der Winkel:

$$poQ = -\varphi$$
$$poR = poQ + QoR = -2\varphi$$
und $$poS = poQ + QoR + RoS = -3\varphi$$

Mithin liegt der Punkt von $(-2-3i)^{-1}$ auf der Geraden oQ und zwar in einer Entfernung $= \frac{1}{r}$ vom Nullpunkte, der Punkt von $(-2-3i)^{-2}$ auf der Geraden oR in einer Entfernung von $\frac{1}{r^2}$ von o und der Punkt von $(-2-3i)^{-3}$ auf oS in einer Entfernung von $\frac{1}{r^3}$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$$
und
$$\varphi = 236^0\ 18'\ 37'' \quad \text{(nach Erkl. 159)}$$
ist, für:

$$(-2-3)^{-1} = \frac{1}{3{,}606} \cdot (\cos 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 236^0\ 18'\ 37'') \quad \text{(nach Antwort auf Frage 76, b)}$$
oder: $$= 0{,}277 \cdot (\cos 123^0\ 41'\ 23'' + i \sin 123^0\ 41'\ 23'') \quad \text{(nach Erkl. 139), dargestellt durch } p_2;$$

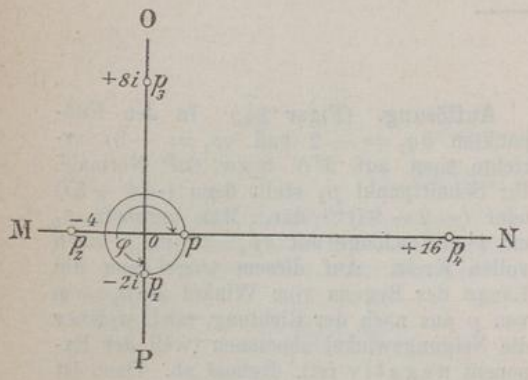
$$(-2-3)^{-2} = \frac{1}{3{,}606^2} \cdot (\cos 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 2 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 472^0\ 37'\ 14'' - i \sin 472^0\ 37'\ 14'')$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 112^0\ 37'\ 14'' - i \sin 112^0\ 37'\ 14'') \quad \text{(nach Erkl. 131)}$$
oder: $$= \frac{1}{13} \cdot (\cos 247^0\ 22'\ 46'' + i \sin 247^0\ 22'\ 46''), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2-3)^{-3} = \frac{1}{3{,}606^3} \cdot (\cos 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'' - i \sin 3 \cdot 236^0\ 18'\ 37'')$$
$$= 0{,}021 \cdot (\cos 708^0\ 55'\ 51'' - i \sin 708^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 348^0\ 55'\ 51'' - i \sin 348^0\ 55'\ 51'')$$
oder: $$= 0{,}021 \cdot (\cos 11^0\ 4'\ 9'' + i \sin 11^0\ 4'\ 9''), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Aufgabe 61. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(-2i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist positiv.

Figur 25.



Auflösung. (Figur 25.) Der Punkt, welcher die Grundzahl der gegebenen Potenz darstellt, liegt auf der Achse der negativen imaginären Zahlen um 2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt und ist p_1. Die Amplitude von $-2i$ ist $\varphi = 270^0$. Da der Exponent positiv ist, so ist von p aus auf dem mit dem Radius $op_1 = r$ beschriebenen Kreis nach der Richtung, nach welcher die Neigungswinkel zunehmen, der Bogen des Winkels von 270^0 4mal (oder von p_1 aus 3mal) abzutragen. Es liegt dann der Punkt des Quadrats von $(-2i)$ auf der Achse der negativen reellen Zahlen und zwar um r^2 Einheiten vom Nullpunkte entfernt, der Punkt von $(-2i)^3$ auf der Achse der positiven imaginären Zahlen und in einer Entfernung $= r^3$ von o, der Punkt von $(-2i)^4$ auf der Achse der positiven reellen Zahlen in einer Entfernung $= r^4$ vom Nullpunkte.

Trigonometrisch erhält man, da:

$$r = \sqrt{2^2} = 2$$

und

$$\varphi = 270^0$$

ist, für:

$$(-2i)^1 = 2\cdot(\cos 270^0 + i \sin 270^0), \text{ dargestellt durch } p_1;$$

$$(-2i)^2 = 2^2\cdot(\cos 2\cdot 270^0 + i \sin 2\cdot 270^0)$$
$$= 4\cdot(\cos 540^0 + i \sin 540^0)$$
oder: $$= 4\cdot(\cos 180^0 + i \sin 180^0) \text{ (nach Erkl. 131), dargestellt durch } p_2;$$

$$(-2i)^3 = 2^3\cdot(\cos 3\cdot 270^0 + i \sin 3\cdot 270^0)$$
$$= 8\cdot(\cos 810^0 + i \sin 810^0)$$
oder: $$= 8\cdot(\cos 90^0 + i \sin 90^0), \text{ dargestellt durch } p_3;$$

$$(-2i)^4 = 2^4\cdot(\cos 4\cdot 270^0 + i \sin 4\cdot 270^0)$$
$$= 16\cdot(\cos 1080^0 + i \sin 1080^0)$$
oder: $$= 16\cdot(\cos 0^0 + i \sin 0^0), \text{ dargestellt durch } p_4.$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 62. Es sind die ersten 5 Potenzen von $(2-i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 59.

Aufgabe 63. Es sind die ersten 4 Potenzen von $(+1{,}5i)$ graphisch und trigonometrisch darzustellen; der Exponent ist negativ.

Andeutung. Die Auflösung erfolgt nach der Antwort auf Frage 78 und mit Berücksichtigung der Aufgabe 60.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg