Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

5) Ueber das trigonometrische und graphische Radizieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

5) Ueber das trigonometrische und graphische Radizieren.

a) Ueber das trigonometrische Radizieren.

Frage 80. Wie lässt sich die $n$te Wurzel aus einer komplexen Zahl:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach dem Moivreschen Satze (siehe Antwort auf Frage 76 und Erkl. 156) ist:

$$(a+bi)^m = r^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{1}{n}$ statt m ein, so erhält man:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{1}{n}\cdot\varphi\right)$$

Nach Erkl. 43a ist aber:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a+bi)^1} = \sqrt[n]{a+bi}$$

und ebenso:

$$r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^1} = \sqrt[n]{r}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(siehe Frage 82)

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man ihren Modulus (Radiusvektor) radiziert und die Amplitude durch den Wurzelexponenten dividiert.“ (Vgl. Erkl. 160).

Erkl. 159. Wie aus nebenstehender Antwort hervorgeht, ist der Moivresche Satz nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Exponenten gültig.

Erkl. 160. Die Radizierung einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit der Division ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Frage 81. Wie lässt sich:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m}$$

trigonometrisch berechnen?

Antwort. Nach Erkl. 43a ist:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m} = (a+bi)^{\frac{m}{n}}$$

Nach dem Moivreschen Satze gibt aber:

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{m}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{m}{n}\cdot\varphi\right)$$

oder:

$$= \sqrt[n]{r^m} \cdot \left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$$

Erkl. 161. Da $\frac{m}{n}$ eine irrationale Zahl (vergl. Erkl. 13) sein kann, so gilt die Regel für die Potenz einer komplexen Zahl also auch für irrationale Exponenten.

Frage 82. Wie lassen sich sämtliche Werte des Wurzelausdruckes:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

bestimmen?

Antwort. Man kann für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

auch schreiben:

$$\sqrt[n]{(\pm 1)\cdot(a+bi)}$$

oder auch (nach Erkl. 9):

$$\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{(a+bi)}$$

und erhält dann nach der Antwort auf Frage 80:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)} = \sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Da der Modulus eine absolute Zahl ist (vergl. Erkl. 12 und Antwort auf Frage 55), so erhält man für $\sqrt[n]{r}$ nur einen einzigen Wert; ebenso gibt der Richtungskoëffizient:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nur einen Wert. Man wird daher die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

erhalten, wenn man alle Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

ermittelt. Setzt man für:

$$\sqrt[n]{\pm 1} = \varrho\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dann ist:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = (\sqrt[n]{\pm 1})^n = \pm 1$$

oder:

$$\varrho^n\cdot\cos n\alpha + i\varrho^n\cdot\sin n\alpha = \pm 1$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell, folglich muss es auch die linke Seite sein, und es muss also das imaginäre Glied $i\cdot\varrho^n\cdot\sin n\alpha$ verschwinden. Da i nicht gleich Null ist, da ferner auch ϱ^n oder ϱ nicht gleich Null sein kann, weil man sonst für:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 0$$

erhalten würde, während dieses Produkt $+1$ oder -1 sein sollte, so muss $\sin n\alpha$ gleich Null sein. Es muss also (nach Erkl. 162):

$$n\alpha = 0^0,\ 180^0,\ 360^0,\ 540^0,\ 720^0\cdots$$

oder:

$$= 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\cdots$$

sein.

Für die Winkel 0^0, 360^0, $720^0\cdots$, oder 0, 2π, $4\pi\cdots$, oder allgemein $n\alpha = 2k\pi$, wenn k eine beliebige, positive, ganze und reelle Zahl (ein-

Erkl. 162. Der Sinus ist Null bei den Winkeln von 0^0, 180^0, 360^0, 540^0, 720^0 u. s. w. oder, wenn man die Winkel statt durch Grade durch die Längen der mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbögen ausdrückt (vergl. Erkl. 98), bei 0, π, 2π, 3π, 4π, 5π u. s. w.

Erkl. 163. Ist n eine gerade Zahl, so e itzt $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+1$ und -1, weil $(\pm 1)^n$ dann $+1$ ist. Ist n eine ungerade Zahl, so gehört zu $\sqrt[n]{+1}$ der Wert $+1$; lässt sich n durch 4 teilen ohne Rest, so hat $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+i$ und $-i$, weil $(\pm i)^n$ in diesem Falle gleich $+1$ ist (s. Antwort auf Frage 5).

Da:

$$(\sqrt[n]{-1})^{2n} = (\sqrt[n]{(-1)^n})^2 = (-1)^2 \text{ (n. Erkl. 43)} = +1$$

ist, so sind die Werte von $\sqrt[n]{-1}$ unter den Werten von $\sqrt[2n]{+1}$. Da ferner:

$$(\sqrt[n]{\pm i})^{4n} = (\sqrt[n]{(\pm i)^n})^4 = (\pm i)^4 = +1$$

ist, so befinden sich die Werte von $\sqrt[n]{\pm i}$ unter den Werten von $\sqrt[4n]{+1}$.

Erkl. 164. Nach Erkl. 123 ist:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

und $$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

Nun gibt:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} + i^2\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$

oder:

$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cdot\left(\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d. i.:

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder:

$$= \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

In gleicher Weise findet man für:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot$$
$$\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] =$$
$$\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]$$

Erkl. 165. Für $k = x$ und $k = x + n$, worin x irgend welche positive reelle Ganzzahl bedeutet, erhält man statt:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \cos\frac{2x\pi}{n}$$

sodann:

$$= \cos\frac{2(x+n)\pi}{n} = \cos\left(\frac{2x\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \sin\frac{2x\pi}{n}$$

schliesslich 0) bedeutet, ist der Cosinus $= +1$, jedoch $= -1$ bei den Winkeln $180^0, 540^0, 900^0 \cdots$, oder $\pi, 3\pi, 5\pi \cdots$, oder allgemein $n\alpha = (2k+1)\pi$.

Folglich erhält man für:

$$+1 = \varrho^n\cdot(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$$
$$-1 = \varrho^n\cdot[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi]$$

(siehe Erkl. 163)

oder:

$$+1 = \varrho^n(+1+0) = +\varrho^n$$

und $$-1 = \varrho^n(-1+0) = -\varrho^n$$

Hieraus ergibt sich, dass ϱ^n gleich der absoluten Einheit ist.

Demnach gibt:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ferner:

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} =$$
$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot$$
$$\left\{\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

Da k, wie bemerkt, jede beliebige, positive und reelle Ganzzahl sein kann, so scheint es, dass man für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

unendlich viele verschiedene Werte erhalten müsste. Da jedoch (nach Erklärung 131):

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

und $$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

und sodann:

$$= \sin \frac{2\cdot(x+n)\pi}{n} = \sin \frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \cos \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \cos\left(\frac{2x+2n+1}{n}\right)\pi$$

$$= \cos \left[\frac{(2x+1)}{n}\pi + 2\pi\right] = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n};$$

statt:

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \sin \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

also stets das nämliche.

ist, so erhält man aus den beiden Klammerausdrücken:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

für zwei Zahlenwerte von k, welche die Differenz n haben, das gleiche (siehe Erkl. 165). Hiernach können sich für:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

nur n verschiedene Werte ergeben, die man erhält, wenn man für k n aufeinanderfolgende Zahlen, am einfachsten die Zahlen: $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einsetzt.

Frage 83. Welche Werte erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

wenn a eine beliebige reelle Zahl bedeutet?

Antwort. Es lässt sich zunächst:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

zerlegen in die beiden Faktoren:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\pm 1}$$

Da nun (nach voriger Antwort):

$$\sqrt[n]{+1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ist, so gibt:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Hierin sind für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einzusetzen (vergl. Erkl. 166 und 167).

Erkl. 166. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{+a}$ zwei reelle Werte, nämlich $+1$ für $k = 0$ und -1 für $k = \frac{n}{2}$. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{+a}$ nur einen reellen Wert, nämlich $+1$ für $k = 0$. (Siehe die Aufgaben.)

Erkl. 167. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{-a}$ nur komplexe oder rein imaginäre Werte. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{-a}$ einen reellen Wert, nämlich -1 für $k = \frac{n-1}{2}$. (Siehe die Aufgaben.)

Frage 84. Welche Werte erhält man für die $n$te Wurzel aus einer positiven oder negativen, rein imaginären Zahl?

Antwort. Ist der Radikandus eine rein imaginäre Zahl, z. B. ai, so ist die Amplitude:

$$\varphi = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

(nach Antwort auf Frage 59 und Erkl. 98)

Erkl. 168. Man erhält für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi}{2n}$$

$$=\frac{\pi+4k\pi}{2n}=\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{(2k+1)\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi+2\pi}{2n}$$

oder:

$$=\frac{4k\pi+3\pi}{2n}=\frac{(4k+3)\pi}{2n}$$

Mithin erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm ai}=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{90^0}{n}+i\sin\frac{90^0}{n}\right)$$

oder:

$$=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

Da nun:

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so erhält man für:

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

oder:

$$=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

(siehe Erkl. 168).

Erkl. 169. Sämtliche Werte von $\sqrt[n]{\pm ai}$ sind entweder rein imaginär oder komplex. (Siehe die Aufgaben.)

Da ferner:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so ergibt:

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$ (siehe Erkl. 169).

Frage 85. Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln desselben Grades zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

so ist:

$$a-bi=r\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(nach Antwort auf Frage 80)

und

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}-i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Setzt man nun für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\cos\frac{\varphi}{n}=A$$

und für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\sin\frac{\varphi}{n}=B$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

so erhält man:

$$\sqrt[n]{a+bi} = A+Bi$$

und

$$\sqrt[n]{a-bi} = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Zieht man aus zwei konjugierten komplexen Zahlen dieselbe Wurzel, so erhält man konjugierte Werte."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

zu berechnen.

Erkl. 170. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+30}{+16} = +1{,}875$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}8750 \\ \operatorname{tg} 61^0\,50' &= 1{,}8676 \\ \text{Rest:} & \quad 74 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 13,1. Mithin kommen zum Winkel $61^0\,50'$ noch:

$$\frac{74}{13{,}1} = 5\frac{85'}{131} = 5'\,39''$$

Demnach ist $\varphi = 61^0\,55'\,39''$.

Erkl. 171. Man erhält für:

$$\cos 15^0\,20' = 0{,}96440$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 7{,}7 = 69$$

Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Folglich gibt:

$$\begin{aligned} \cos 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}96440 \\ &- \quad 69 \\ &= 0{,}96371 \end{aligned}$$

Erkl. 172. Es gibt:

$$\sin 15^0\,20' = 0{,}26443$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 28{,}1 = 251$$

Letztere ist beim Sinus zu addieren. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}26443 \\ &+ \quad 251 \\ &= 0{,}26694 \end{aligned}$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Beispiel ist:

$$a = 16; \qquad bi = 30i$$

$$r = \sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{1156} = 34$$

$$n = 4; \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3$$

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[4]{34} = \sqrt{5{,}83095} = 2{,}415$$

$$\varphi = 61^0\,55'\,39'' \text{ (nach Erkl. 170)}$$

Folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot(\cos 15^0\,28'\,55'' + i\sin 15^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96371 \text{ (nach Erkl. 171)}$$

und

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \text{ (nach Erkl. 172)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}96371 + 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}327 + 0{,}645\,i \ldots\ldots\ldots x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0 55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{421^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{421^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 105^0 28'\,55'' + i\sin 105^0 28'\,55'')$$

Erkl. 173. Da:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -\cos(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
oder:
$$= -\cos 73^0\,31'\,5''$$
ist, so ergibt sich für:
$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26724 \quad (= -\cos 73^0\,30'')$$
$$-\quad 30 \quad \left(= \text{Diff. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= -0{,}26694$$

Erkl. 174. Es ist:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = \sin(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
$$= \sin 73^0\,31'\,5''$$
Mithin gibt:
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = 0{,}96363 \quad (= \sin 73^0\,30')$$
$$+\quad 8 \quad \left(= \text{Differ. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= 0{,}96371$$

Erkl. 175. Es ist:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -\cos(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\cos 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 171)}$$

Erkl. 176. Es ist:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -\sin(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\sin 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 172)}$$

Erkl. 177. Man erhält für:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = +\cos(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= \cos 74^0\,31'\,5''$$
$$= 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

Erkl. 178. Man erhält für:

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -\sin(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= -\sin 74^0\,31'\,5''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

Erkl. 179. Da:

$$\sqrt[4]{16+30i} = \sqrt{\sqrt{16+30i}}$$
ist (nach Erkl. 8), so lassen sich die verschiedenen Werte von:
$$\sqrt[4]{16+30i}$$
mit Hilfe der Antwort auf Frage 51 berechnen. Man erhält:
$$\sqrt[2]{16+30i} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right) = \pm(5+3i)$$
ferner:
$$\sqrt[2]{+(5+3i)} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}}\right) = \pm(2{,}327+0{,}645i)$$

Nun gibt:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$
und
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = +0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$
folglich ist:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}26694 + 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -0{,}645 + 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{781^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{781^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 195^0\,28'\,55'' + i\sin 195^0\,28'\,54'')$$

Nun erhält man für:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 175)}$$
und für:
$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 176)}$$
folglich gibt:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}96371 - 0{,}26694i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -2{,}327 - 0{,}645i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}414\cdot\left(\cos\frac{1141^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{1141^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 285^0\,28'\,55'' + i\sin 285^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 177)}$$
und
$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 178)}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}26694 - 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 0{,}645 - 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_4$$
(vergl. Erkl. 179 und 180)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

also:

$$x_1 = +2{,}327 + 0{,}645\,i$$
$$x_2 = -2{,}327 - 0{,}645\,i$$

endlich:

$$\sqrt[2]{-(5+3i)} = \sqrt[2]{-5-3i}$$
$$= \pm\left(\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}} - i\cdot\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}}\right)$$
$$= \pm(0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

also:

$$x_3 = +0{,}645 - 2{,}327\,i$$
$$x_4 = -0{,}645 + 2{,}327\,i$$

Demnach erhält man dieselben Werte wie durch nebenstehende Rechnung.

Erkl. 180. Nach einem Satze der Algebra muss die Summe der Wurzeln gleich Null sein. Man erhält für das vorliegende Beispiel:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$$
$$(+2{,}327 + 0{,}645\,i) + (-0{,}645 + 2{,}327\,i) +$$
$$(-2{,}327 - 0{,}645\,i) + (0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

oder:

$$\begin{array}{r} +2{,}327 + 0{,}645\,i \\ -0{,}645 + 2{,}327\,i \\ -2{,}327 - 0{,}645\,i \\ +0{,}645 - 2{,}327\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 65. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zu berechnen.

Erkl. 181. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+4}{+3} = +1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 1{,}3333 \\ \operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270 \\ \hline \text{Rest:}\quad 63 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Mithin kommen zum Winkel 53^0 noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\,\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Es ist also $\varphi = 53^0\,7'\,47''$.

Erkl. 182. Es gibt:

$$\cos 77^0\,40' = 0{,}21360$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6\cdot 28{,}4 = 74$. Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Mithin ist:

$$\begin{array}{r} \cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21360 \\ - \quad 74 \\ \hline = 0{,}21286 \end{array}$$

Auflösung. Da sich:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zerlegen lässt in:

$$\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{3+4i}$$

so erfolgt die Berechnung von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 82 abgeleiteten Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$ (siehe auch Erkl. 188)

Es ist:

$a = 3;\quad b = 4;\quad r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$n = 3;\quad k = 0,\ 1$ und 2

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ (denn $1{,}71^3 = 5$)

$\varphi = 53^0\,7'\,47''$ (nach Erkl. 181)

Erkl. 183. Man erhält für:

$$\sin 77^0\,40' = 0{,}97692$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6 \cdot 6{,}2 = 16$. Letztere ist beim Sinus zu addieren. Demnach gibt:

$$\begin{aligned} \sin 77^0\,42'\,36'' &= 0{,}97692 \\ &+\quad 16 \\ &= 0{,}97708 \end{aligned}$$

Erkl. 184. Da:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -\cos(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\cos 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}95284 \quad (= -\cos 17^0\,40') \\ &\quad -\quad 23 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}95261 \end{aligned}$$

Erkl. 185. Da:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -\sin(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\sin 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}30348 \quad (= -\sin 17^0\,40') \\ &\quad +\quad 72 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}30420 \end{aligned}$$

Erkl. 186. Da:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= +\cos(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= \cos 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= 0{,}74120 \quad (= \cos 42^0\,10') \\ &\quad -\quad 145 \quad (= \text{Diff. für } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= 0{,}73975 \end{aligned}$$

Erkl. 187. Da:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -\sin(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= -\sin 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -0{,}67129 \quad (= -\sin 42^0\,10') \\ &\quad +\quad 159 \quad (= \text{Diff. f. } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= -0{,}67288 \end{aligned}$$

Erkl. 188. Es lassen sich auch die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

nach der anderen Formel der Antwort auf Frage 82, nämlich nach:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

berechnen. Dann erhält man für:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4}{-3} = +1{,}333\cdots$$

also:

$$\varphi = 180^0 + 53^0\,7'\,47'' = 233^0\,7'\,47''$$

Mithin erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i \sin 77^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21286 \quad \text{(nach Erkl. 182)}$$

und

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97708 \quad \text{(nach Erkl. 183)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}21286 + 0{,}97708\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 0{,}364 + 1{,}671\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{593^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{593^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i \sin 197^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

oder, da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95261 \quad \text{(nach Erkl. 184)}$$

und

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30420 \quad \text{(nach Erkl. 185)}$$

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (-0{,}95261 - 0{,}30420\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = -1{,}629 - 0{,}520\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{953^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{953^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i \sin 317^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und für:

$$k = 0.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$
$$= 0{,}364 + 1{,}671\,i$$

$$k = 1.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$
$$= -1{,}629 - 0{,}520\,i$$

$$k = 2.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$
$$= 1{,}265 - 1{,}151\,i$$

oder, da:

$\cos 317^0\,42'\,36'' = +0{,}73975$ (nach Erkl. 186)

und

$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67288$ (nach Erkl. 187)

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}73975 - 0{,}67288\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = +1{,}265 - 1{,}151\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 188 und 189)

Erkl. 189. Nach Erkl. 180 muss:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort oder vorstehender Erklärung:

$$\begin{array}{r} +0{,}364 + 1{,}671\,i \\ -1{,}629 - 0{,}520\,i \\ +1{,}265 - 1{,}151\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 66. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[5]{+32}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 erhält man für:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Im vorliegenden Beispiele ist:

$$a = 32; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{32} = 2$$
$$n = 5; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

Folglich ergibt sich für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2 \cdot (1 + 0) = +2 \;\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2 \cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{2 \cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 72^0 + i\sin 72^0)$$
$$= 2 \cdot (0{,}30902 + i \cdot 0{,}95106)$$
$$= 0{,}61804 + 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{4\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 144^0 + i\sin 144^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 + i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 + i\cdot 0{,}58779)$$
$$= -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{6\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{6\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 216^0 + i\sin 216^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 - i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 - 0{,}58779\,i)$$
$$= -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{8\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{8\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 288^0 + i\sin 288^0)$$
$$= 2\cdot(\cos 72^0 - i\sin 72^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(0{,}30902 - 0{,}95106\,i)$$
$$= 0{,}61804 - 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

(vergl. Erkl. 190)

Erkl. 190. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort:

$$\begin{array}{r} +2 \\ +0{,}61804 + 1{,}90212\,i \\ -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \\ -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \\ +0{,}61804 - 1{,}90212\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 67. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[6]{-729}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 ist:

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a = 729$; $k = 0, 1, 3, 4$ und 5; $n = 6$;

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[6]{729} = 3$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= 2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 3\cdot(0 + i) = 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 210^0 + i\sin 210^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59808 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 3\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

6) $k = 5.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= +2{,}59809 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_6$$
(vergl. Erkl. 191)

Erkl. 191. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ +3{,}0\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -3\,i \\ +2{,}59809 - 1{,}5\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 68. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{216\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{+a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$a = 216; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[3]{216} = 6$$
$$n = 3; \qquad k = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 6\cdot(0{,}86603 + i\cdot 0{,}5)$$
$$= 5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 6\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= -5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 192. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +5{,}19618 + 3i \\ -5{,}19618 + 3i \\ -6i \\ \hline = 0 \end{array}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{216\,i} &= 6\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right) \\ &= 6\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0) \\ &= 6\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -6i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 192)

Aufgabe 69. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{-16\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{-a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$

Im gegebenen Wurzelausdruck ist:

$$a = 16; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3; \qquad n = 4$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 67^0\,30' + i\sin 67^0\,30') \\ &= 2\cdot(0{,}38268 + 0{,}92388\,i) \\ &= 0{,}76536 + 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\; x_1 \end{aligned}$$

Erkl. 193. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

sein. Die nebenstehende Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} +0{,}76536 + 1{,}84776\,i \\ -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \\ -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \\ +1{,}84776 - 0{,}76536\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

2) $k = 1.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 157^0\,30' + i\sin 157^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 22^0\,30' + i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 2\cdot(-0{,}92388 + 0{,}38268\,i) \\ &= -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 \end{aligned}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 247^0\,30' + i\sin 247^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 67^0\,30' - i\sin 67^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

4) $k = 3.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{15\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{15\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 337^0\,30' + i\sin 337^0\,30') \\ &= 2\cdot(\cos 22^0\,30' - i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}84776 - 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_4 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 193)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von nachfolgenden Wurzelausdrücken sind die verschiedenen Werte zu berechnen:

a) $\sqrt[3]{35-23i}$

b) $\sqrt[4]{-15+\sqrt{-31}}$

c) $\sqrt[4]{+625}$

d) $\sqrt[5]{-243}$

e) $\sqrt[3]{+27i}$

f) $\sqrt{-81i}$

Andeutungen.

a) Die Auflösung hat nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

zu erfolgen.

b) Die Auflösung kann nach vorstehender Formel oder nach der Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]+i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

erfolgen; im ersteren Falle ist für $\operatorname{tg}\varphi=\frac{+\sqrt{31}}{-15}$, im letzteren $=\frac{-\sqrt{31}}{+15}$ zu setzen (siehe Aufgabe 65 und Erkl. 188).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 66.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 67.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 68.

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 69.

---

b) Ueber das graphische Radizieren.

Anmerkung 10. Da sich die graphische Darstellung von Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht ohne Berechnung einzelner Teile der Wurzeln ausführen lässt, so begnügen wir uns hier mit der graphischen Darstellung der Quadratwurzeln.

Frage 86. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt?

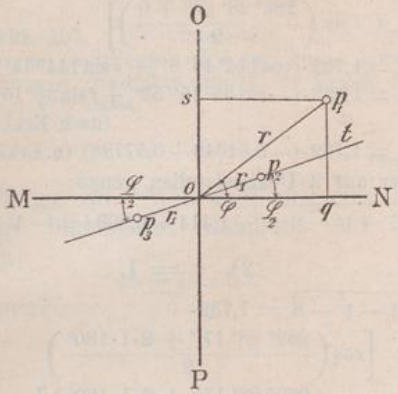
Antwort. (Fig. 26.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq=+a$ und $os=+bi$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Radikandus dar.

Man verbinde p_1 mit o, halbiere den Winkel $p_1oq=\varphi$, weil:

$$\sqrt[2]{a+bi}=\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist (nach Antwort auf Frage 80), und trage von o aus auf dieser Halbierungslinie das Stück $\sqrt[2]{r}$ oder, da $r=\sqrt[2]{a^2+b^2}$ ist, das Stück $\sqrt[2]{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $\sqrt[4]{a^2+b^2}$

Figur 26.



(nach Erkl. 8) ab. Der Endpunkt p_2 dieser Strecke stellt dann $\sqrt{a+bi}$ dar.

Da jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, so muss es noch einen zweiten Punkt geben, welcher $\sqrt{a+bi}$ darstellt. Dieser Punkt (p_3) liegt auf der Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels φ und ist ebenfalls um das Stück $\sqrt{r}$ vom Nullpunkte entfernt.

Beweis. Die zu p_3 gehörende komplexe Zahl ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left[\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

oder, da:

$$\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\quad\text{(n. Erkl. 101)}$$

ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder:

$$-\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

d. i. das Entgegengesetzte von:

$$+\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Summe beider Werte gibt 0, wie es der Satz in Erkl. 180 verlangt.

α) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 71. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}}$$

zu berechnen und graphisch darzustellen.

Erkl. 194. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{8}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: }\ 45$$

Differenz für 1 Minute = 26,3. Mithin kommt zum Winkel 70° 30′ noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\,\frac{187'}{263}=1'\,43''$$

Demnach ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Auflösung. (Figur 27.) Nach Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$n=2;\quad a=1;\quad b=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{1^2+(\sqrt{8})^2}}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=1{,}732\cdots$$

$$k=0\text{ und }1;\quad\varphi=289^0\,28'\,17''\quad\text{(n. Erkl. 194)}$$

Erkl. 195. Man erhält für:

$$\begin{aligned}\cos 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}81748 \quad (= \cos 35^0\,10') \\ &\quad - \quad 99 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}81649 \\ \sin 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}57596 \quad (= \sin 35^0\,10') \\ &\quad + \quad 140 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}57736\end{aligned}$$

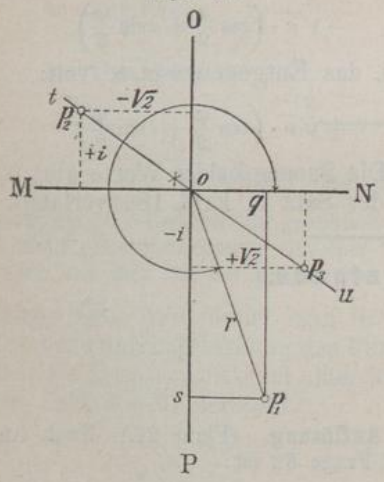
Erkl. 196. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 = 0$$

sein. Aus nebenstehender Rechnung folgt:

$$\begin{array}{r} -\sqrt{2} + i \\ +\sqrt{2} - i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Figur 27.



folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 144^0\,44'\,8'' + i \sin 144^0\,44'\,8'') \\ &= 1{,}732 \cdot (-\cos 35^0\,15''\,52'' + i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (-0{,}81649 + 0{,}57736) \quad \text{(n. Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = -1{,}414 + 0{,}999\,i = -\sqrt{2} + i$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \\ &\quad \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot \left(\cos \frac{649^0\,28'\,17''}{2} + i \sin \frac{649^0\,28'\,17''}{2}\right) \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 324^0\,44'\,8'' + i \sin 324^0\,44'\,8'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 131)} \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 35^0\,15'\,52'' - i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (0{,}81649 - 0{,}57736) \quad \text{(nach Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}414 - 0{,}999\,i = \sqrt{2} - i$$

(vergl. Erkl. 196)

Die diese beiden Werte in der Zahlenebene darstellenden Punkte findet man auf folgende Weise:

Man errichtet in den Endpunkten der Strecken $oq = +1$ und $os = -\sqrt{-8} = -2{,}828\,i$ auf MN bezw. OP Normale, verbinde ihren Schnittpunkt p_1 mit o, halbiere den Winkel qop_1 und trage auf tu von o nach beiden Seiten hin die Strecke:

$$r_1 = \sqrt{r} = 1{,}732$$

ab; die Endpunkte p_2 und p_3 sind die gesuchten Punkte von:

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{-8}}$$

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 72. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt[2]{3+4i}$$

rechnerisch und graphisch zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 71.

c) Ueber die Auflösung der binomischen Gleichungen.

Frage 87. Was versteht man unter einer binomischen Gleichung?

Erkl. 197. Die binomischen (d. h. zweigliedrigen) Gleichungen sind sog. reine höhere Gleichungen, weil ihre unbekannte Grösse nur einmal vorkommt.

Antwort. Unter einer binomischen Gleichung versteht man eine Gleichung von der Form:

$$y^n \pm a = 0$$

in welcher a irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Frage 88. Wie lässt sich eine beliebige binomische Gleichung auf die Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

bringen?

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$y^n \pm a = 0$$

für $y^n = ax^n$ oder für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ ein, so erhält man:

$$y^n \pm a = ax^n \pm a = 0$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch a, so ergibt sich:

$$\frac{ax^n}{a} \pm \frac{a}{a} = 0$$

oder:

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{(nach Erkl. 19)}$$

Auf diese Form kann man jede binomische Gleichung bringen, sobald man für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ einsetzt.

Die Auflösung binomischer Gleichungen besteht also vorzugsweise in der Aufsuchung der verschiedenen Wurzelwerte der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$.

Frage 89. Wie findet man die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^n \pm 1 = 0?$$

Erkl. 198. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Jede Gleichung hat ebensoviele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten besitzt."

Hiernach besitzt die Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ n verschiedene Wurzeln.

Antwort. Aus $x^n \pm 1 = 0$ folgt:

$$x^n = \mp 1$$

und

$$x = \sqrt[n]{\mp 1}$$

Demnach sind die Wurzeln der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ dieselben wie die Werte der $n$ten Wurzeln aus der negativen bezw. positiven Einheit.

Nach der Antwort auf Frage 82 war:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Aus der ersten Formel erhält man sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n - 1 = 0$$

aus der zweiten Formel sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

wenn man in diese Formeln für k nacheinander die Werte:

$$0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$$

einsetzt.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Es sind die verschiedenen Wurzeln der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$
d) $x^5 + 1 = 0$

Erkl. 199. Aus der Lehre von den höheren Gleichungen ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied das Minuszeichen führt, hat mindestens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. [Vergl. die Aufgaben 73, a) und c)].
2) Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Wurzel, welche das entgegengesetzte Vorzeichen des letzten Gliedes führt. [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
3) Besitzt eine Gleichung mit reellen Koëffizienten eine Wurzel von der Form $a + bi$, so ist $a - bi$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung. (Es kommen hiernach die komplexen Wurzeln stets in gerader Anzahl vor.) [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
4) Die reellen Wurzeln einer Gleichung kommen stets in gerader Anzahl vor, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, jedoch in ungerader Anzahl, wenn der höchste Exponent der Unbekannten eine ungerade Zahl ist. (Vergl. nebenstehende Aufgabe.)

Auflösungen.

a) Man findet die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ aus der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

wenn man für $n = 2$ und für k die Werte 0 und 1 einsetzt. Man erhält alsdann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

(Probe: $x_1 + x_2 = +1 - 1 = 0$; s. Erkl. 180.)

---

b) Die 3 Wurzeln der Gleichung $x^3 + 1 = 0$ findet man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

wenn man in dieselbe für $n = 3$ und für k nacheinander die Werte 0, 1 und 2 einsetzt. Dann ergibt sich für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 60^0 + i\sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 300^0 + i\sin 300^0 = \cos 60^0 - i\sin 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = 0$.)

c) Die Berechnung der 4 Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ geschieht mittels der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

in welche man für $n = 4$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2 und 3 einzusetzen hat. Dann erhält man für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} = \cos 90^0 + i\sin 90^0 = +i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} = \cos 180^0 + i\sin 180^0$$
$$= -1 + 0i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} = \cos 270^0 + i\sin 270^0 = -i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +1 + i - 1 - i = 0$.)

d) Die Gleichung $x^5 + 1$ hat 5 Wurzeln, welche man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

findet, wenn man in dieselbe für $n = 5$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzt. Man erhält dann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 36^0 + i\sin 36^0 = 0{,}80902 + 0{,}58779\,i$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 108^0 + i\sin 108^0 = -\cos 72^0 + i\sin 72^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 + 0{,}95106\,i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0\cdot i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0 \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 - 0{,}95106\,i$$

5) $k = 4$.

$$x_5 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0$$
$$= 0{,}80902 - 0{,}58779\,i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = +0{,}80902 + 0{,}58779\,i - 0{,}30902 + 0{,}95106\,i - 1 - 0{,}30902 - 0{,}95106\,i + 0{,}80902 - 0{,}58779\,i = 0$; vergl. Erkl. 180.)

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 74. Es sind die verschiedenen Werte der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^5 - 1 = 0$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 73, a) bis d).

E. Ueber die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Anmerkung 11. Zum Verständnis dieses Teiles unseres Lehrbuches sind diejenigen Kenntnisse der Goniometrie und der Logarithmenrechnung erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Goniometrie und der Logarithmen von Dr. A. Kleyer erworben werden können.

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Frage 90. Auf welche Weise lässt sich $\cos^n\varphi$ durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Setzt man für:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und für:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a + b = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

und demnach:

$$2^n\cos^n\varphi = (a+b)^n$$