Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber das trigonometrische Radizieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

5) Ueber das trigonometrische und graphische Radizieren.

a) Ueber das trigonometrische Radizieren.

Frage 80. Wie lässt sich die $n$te Wurzel aus einer komplexen Zahl:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

trigonometrisch darstellen?

Antwort. Nach dem Moivreschen Satze (siehe Antwort auf Frage 76 und Erkl. 156) ist:

$$(a+bi)^m = r^m \cdot (\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{1}{n}$ statt m ein, so erhält man:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{1}{n}\cdot\varphi\right)$$

Nach Erkl. 43a ist aber:

$$(a+bi)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{(a+bi)^1} = \sqrt[n]{a+bi}$$

und ebenso:

$$r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r^1} = \sqrt[n]{r}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(siehe Frage 82)

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Eine komplexe Zahl wird radiziert, indem man ihren Modulus (Radiusvektor) radiziert und die Amplitude durch den Wurzelexponenten dividiert.“ (Vgl. Erkl. 160).

Erkl. 159. Wie aus nebenstehender Antwort hervorgeht, ist der Moivresche Satz nicht nur für ganze, sondern auch für gebrochene Exponenten gültig.

Erkl. 160. Die Radizierung einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit der Division ihrer Richtung um den Nullpunkt.

Frage 81. Wie lässt sich:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m}$$

trigonometrisch berechnen?

Antwort. Nach Erkl. 43a ist:

$$(\sqrt[n]{a+bi})^m \text{ oder } \sqrt[n]{(a+bi)^m} = (a+bi)^{\frac{m}{n}}$$

Nach dem Moivreschen Satze gibt aber:

$$(a+bi)^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}} \cdot \left(\cos\frac{m}{n}\cdot\varphi + i\sin\frac{m}{n}\cdot\varphi\right)$$

oder:

$$= \sqrt[n]{r^m} \cdot \left(\cos\frac{m\varphi}{n} + i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)$$

Erkl. 161. Da $\frac{m}{n}$ eine irrationale Zahl (vergl. Erkl. 13) sein kann, so gilt die Regel für die Potenz einer komplexen Zahl also auch für irrationale Exponenten.

Frage 82. Wie lassen sich sämtliche Werte des Wurzelausdruckes:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

bestimmen?

Antwort. Man kann für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

auch schreiben:

$$\sqrt[n]{(\pm 1)\cdot(a+bi)}$$

oder auch (nach Erkl. 9):

$$\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{(a+bi)}$$

und erhält dann nach der Antwort auf Frage 80:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)} = \sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Da der Modulus eine absolute Zahl ist (vergl. Erkl. 12 und Antwort auf Frage 55), so erhält man für $\sqrt[n]{r}$ nur einen einzigen Wert; ebenso gibt der Richtungskoëffizient:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

nur einen Wert. Man wird daher die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

erhalten, wenn man alle Werte von:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

ermittelt. Setzt man für:

$$\sqrt[n]{\pm 1} = \varrho\cdot(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

dann ist:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = (\sqrt[n]{\pm 1})^n = \pm 1$$

oder:

$$\varrho^n\cdot\cos n\alpha + i\varrho^n\cdot\sin n\alpha = \pm 1$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell, folglich muss es auch die linke Seite sein, und es muss also das imaginäre Glied $i\cdot\varrho^n\cdot\sin n\alpha$ verschwinden. Da i nicht gleich Null ist, da ferner auch ϱ^n oder ϱ nicht gleich Null sein kann, weil man sonst für:

$$\varrho^n\cdot(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = 0$$

erhalten würde, während dieses Produkt $+1$ oder -1 sein sollte, so muss $\sin n\alpha$ gleich Null sein. Es muss also (nach Erkl. 162):

$$n\alpha = 0^0,\ 180^0,\ 360^0,\ 540^0,\ 720^0\cdots$$

oder:

$$= 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi\cdots$$

sein.

Für die Winkel 0^0, 360^0, $720^0\cdots$, oder 0, 2π, $4\pi\cdots$, oder allgemein $n\alpha = 2k\pi$, wenn k eine beliebige, positive, ganze und reelle Zahl (ein-

Erkl. 162. Der Sinus ist Null bei den Winkeln von 0^0, 180^0, 360^0, 540^0, 720^0 u. s. w. oder, wenn man die Winkel statt durch Grade durch die Längen der mit dem Halbmesser $= 1$ zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Kreisbögen ausdrückt (vergl. Erkl. 98), bei 0, π, 2π, 3π, 4π, 5π u. s. w.

Erkl. 163. Ist n eine gerade Zahl, so e itzt $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+1$ und -1, weil $(\pm 1)^n$ dann $+1$ ist. Ist n eine ungerade Zahl, so gehört zu $\sqrt[n]{+1}$ der Wert $+1$; lässt sich n durch 4 teilen ohne Rest, so hat $\sqrt[n]{+1}$ die Werte $+i$ und $-i$, weil $(\pm i)^n$ in diesem Falle gleich $+1$ ist (s. Antwort auf Frage 5).

Da:

$$(\sqrt[n]{-1})^{2n} = (\sqrt[n]{(-1)^n})^2 = (-1)^2 \text{ (n. Erkl. 43)} = +1$$

ist, so sind die Werte von $\sqrt[n]{-1}$ unter den Werten von $\sqrt[2n]{+1}$. Da ferner:

$$(\sqrt[n]{\pm i})^{4n} = (\sqrt[n]{(\pm i)^n})^4 = (\pm i)^4 = +1$$

ist, so befinden sich die Werte von $\sqrt[n]{\pm i}$ unter den Werten von $\sqrt[4n]{+1}$.

Erkl. 164. Nach Erkl. 123 ist:

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

und $$\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$$

Nun gibt:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$
$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} + i^2\cdot\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$

oder:

$$= \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} - \sin\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$$
$$+ i\cdot\left(\sin\frac{\varphi}{n}\cdot\cos\frac{2k\pi}{n} + \cos\frac{\varphi}{n}\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

d. i.:

$$= \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder:

$$= \cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

In gleicher Weise findet man für:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot$$
$$\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right] =$$
$$\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]$$

Erkl. 165. Für $k = x$ und $k = x + n$, worin x irgend welche positive reelle Ganzzahl bedeutet, erhält man statt:

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \cos\frac{2x\pi}{n}$$

sodann:

$$= \cos\frac{2(x+n)\pi}{n} = \cos\left(\frac{2x\pi}{n} + 2\pi\right)$$
$$= \cos\frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\sin\frac{2k\pi}{n} \text{ einmal} = \sin\frac{2x\pi}{n}$$

schliesslich 0) bedeutet, ist der Cosinus $= +1$, jedoch $= -1$ bei den Winkeln $180^0, 540^0, 900^0 \cdots$, oder $\pi, 3\pi, 5\pi \cdots$, oder allgemein $n\alpha = (2k+1)\pi$.

Folglich erhält man für:

$$+1 = \varrho^n\cdot(\cos 2k\pi + i\sin 2k\pi)$$
$$-1 = \varrho^n\cdot[\cos(2k+1)\pi + i\sin(2k+1)\pi]$$

(siehe Erkl. 163)

oder:

$$+1 = \varrho^n(+1+0) = +\varrho^n$$

und $$-1 = \varrho^n(-1+0) = -\varrho^n$$

Hieraus ergibt sich, dass ϱ^n gleich der absoluten Einheit ist.

Demnach gibt:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ferner:

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+(a+bi)} =$$
$$\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

und

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot$$
$$\left\{\cos\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi + (2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

Da k, wie bemerkt, jede beliebige, positive und reelle Ganzzahl sein kann, so scheint es, dass man für:

$$\sqrt[n]{\pm(a+bi)}$$

unendlich viele verschiedene Werte erhalten müsste. Da jedoch (nach Erklärung 131):

$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$$

und $$\sin(2\pi + \alpha) = \sin\alpha$$

und sodann:

$$= \sin \frac{2\cdot(x+n)\pi}{n} = \sin \frac{2x\pi}{n};$$

statt:

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \cos \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \cos\left(\frac{2x+2n+1}{n}\right)\pi$$

$$= \cos \left[\frac{(2x+1)}{n}\pi + 2\pi\right] = \cos \frac{(2x+1)\pi}{n};$$

statt:

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \text{ einmal } = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

und sodann:

$$= \sin \left[\frac{2\cdot(x+n)+1}{n}\right]\pi = \sin \frac{(2x+1)\pi}{n}$$

also stets das nämliche.

ist, so erhält man aus den beiden Klammerausdrücken:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

für zwei Zahlenwerte von k, welche die Differenz n haben, das gleiche (siehe Erkl. 165). Hiernach können sich für:

$$\sqrt[n]{\pm 1}$$

nur n verschiedene Werte ergeben, die man erhält, wenn man für k n aufeinanderfolgende Zahlen, am einfachsten die Zahlen: $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einsetzt.

Frage 83. Welche Werte erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

wenn a eine beliebige reelle Zahl bedeutet?

Antwort. Es lässt sich zunächst:

$$\sqrt[n]{\pm a}$$

zerlegen in die beiden Faktoren:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{\pm 1}$$

Da nun (nach voriger Antwort):

$$\sqrt[n]{+1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$$

ist, so gibt:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}\right)$$

und

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Hierin sind für k nacheinander die Zahlen $0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$ einzusetzen (vergl. Erkl. 166 und 167).

Erkl. 166. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{+a}$ zwei reelle Werte, nämlich $+1$ für $k = 0$ und -1 für $k = \frac{n}{2}$. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{+a}$ nur einen reellen Wert, nämlich $+1$ für $k = 0$. (Siehe die Aufgaben.)

Erkl. 167. Ist n eine gerade Zahl, so besitzt $\sqrt[n]{-a}$ nur komplexe oder rein imaginäre Werte. Ist n eine ungerade Zahl, so hat $\sqrt[n]{-a}$ einen reellen Wert, nämlich -1 für $k = \frac{n-1}{2}$. (Siehe die Aufgaben.)

Frage 84. Welche Werte erhält man für die $n$te Wurzel aus einer positiven oder negativen, rein imaginären Zahl?

Antwort. Ist der Radikandus eine rein imaginäre Zahl, z. B. ai, so ist die Amplitude:

$$\varphi = 90^0 = \frac{\pi}{2}$$

(nach Antwort auf Frage 59 und Erkl. 98)

Erkl. 168. Man erhält für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi}{2n}$$

$$=\frac{\pi+4k\pi}{2n}=\frac{(4k+1)\pi}{2n}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$\frac{\pi}{2n}+\frac{(2k+1)\pi}{n}=\frac{\pi}{2n}+\frac{4k\pi+2\pi}{2n}$$

oder:

$$=\frac{4k\pi+3\pi}{2n}=\frac{(4k+3)\pi}{2n}$$

Mithin erhält man für:

$$\sqrt[n]{\pm ai}=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{90^0}{n}+i\sin\frac{90^0}{n}\right)$$

oder:

$$=\sqrt[n]{\pm 1}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

Da nun:

$$\sqrt[n]{+1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so erhält man für:

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{+ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

oder:

$$=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

(siehe Erkl. 168).

Erkl. 169. Sämtliche Werte von $\sqrt[n]{\pm ai}$ sind entweder rein imaginär oder komplex. (Siehe die Aufgaben.)

Da ferner:

$$\sqrt[n]{-1}=\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

(nach Antwort auf Frage 82)

ist, so ergibt:

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

oder (nach Erkl. 164):

$$\sqrt[n]{-ai}=\sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n}+i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$ (siehe Erkl. 169).

Frage 85. Welche Beziehung findet zwischen den Wurzeln desselben Grades zweier konjugierten komplexen Zahlen statt?

Antwort. Setzt man für:

$$a+bi=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

so ist:

$$a-bi=r\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 59)

ferner:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

(nach Antwort auf Frage 80)

und

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n}-i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Setzt man nun für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\cos\frac{\varphi}{n}=A$$

und für:

$$\sqrt[n]{r}\cdot\sin\frac{\varphi}{n}=B$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

so erhält man:

$$\sqrt[n]{a+bi} = A+Bi$$

und

$$\sqrt[n]{a-bi} = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Zieht man aus zwei konjugierten komplexen Zahlen dieselbe Wurzel, so erhält man konjugierte Werte."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

zu berechnen.

Erkl. 170. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+30}{+16} = +1{,}875$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}8750 \\ \operatorname{tg} 61^0\,50' &= 1{,}8676 \\ \text{Rest:} & \quad 74 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 13,1. Mithin kommen zum Winkel $61^0\,50'$ noch:

$$\frac{74}{13{,}1} = 5\frac{85'}{131} = 5'\,39''$$

Demnach ist $\varphi = 61^0\,55'\,39''$.

Erkl. 171. Man erhält für:

$$\cos 15^0\,20' = 0{,}96440$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 7{,}7 = 69$$

Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Folglich gibt:

$$\begin{aligned} \cos 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}96440 \\ &- \quad 69 \\ &= 0{,}96371 \end{aligned}$$

Erkl. 172. Es gibt:

$$\sin 15^0\,20' = 0{,}26443$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 28{,}1 = 251$$

Letztere ist beim Sinus zu addieren. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}26443 \\ &+ \quad 251 \\ &= 0{,}26694 \end{aligned}$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Beispiel ist:

$$a = 16; \qquad bi = 30i$$

$$r = \sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{1156} = 34$$

$$n = 4; \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3$$

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[4]{34} = \sqrt{5{,}83095} = 2{,}415$$

$$\varphi = 61^0\,55'\,39'' \text{ (nach Erkl. 170)}$$

Folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot(\cos 15^0\,28'\,55'' + i\sin 15^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96371 \text{ (nach Erkl. 171)}$$

und

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \text{ (nach Erkl. 172)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}96371 + 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}327 + 0{,}645\,i \ldots\ldots\ldots x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0 55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{421^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{421^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 105^0 28'\,55'' + i\sin 105^0 28'\,55'')$$

Erkl. 173. Da:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -\cos(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
oder:
$$= -\cos 73^0\,31'\,5''$$
ist, so ergibt sich für:
$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26724 \quad (= -\cos 73^0\,30'')$$
$$-\quad 30 \quad \left(= \text{Diff. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= -0{,}26694$$

Erkl. 174. Es ist:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = \sin(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
$$= \sin 73^0\,31'\,5''$$
Mithin gibt:
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = 0{,}96363 \quad (= \sin 73^0\,30')$$
$$+\quad 8 \quad \left(= \text{Differ. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= 0{,}96371$$

Erkl. 175. Es ist:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -\cos(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\cos 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 171)}$$

Erkl. 176. Es ist:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -\sin(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\sin 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 172)}$$

Erkl. 177. Man erhält für:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = +\cos(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= \cos 74^0\,31'\,5''$$
$$= 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

Erkl. 178. Man erhält für:

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -\sin(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= -\sin 74^0\,31'\,5''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

Erkl. 179. Da:

$$\sqrt[4]{16+30i} = \sqrt{\sqrt{16+30i}}$$
ist (nach Erkl. 8), so lassen sich die verschiedenen Werte von:
$$\sqrt[4]{16+30i}$$
mit Hilfe der Antwort auf Frage 51 berechnen. Man erhält:
$$\sqrt[2]{16+30i} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right) = \pm(5+3i)$$
ferner:
$$\sqrt[2]{+(5+3i)} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}}\right) = \pm(2{,}327+0{,}645i)$$

Nun gibt:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$
und
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = +0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$
folglich ist:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}26694 + 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -0{,}645 + 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{781^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{781^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 195^0\,28'\,55'' + i\sin 195^0\,28'\,54'')$$

Nun erhält man für:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 175)}$$
und für:
$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 176)}$$
folglich gibt:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}96371 - 0{,}26694i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -2{,}327 - 0{,}645i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}414\cdot\left(\cos\frac{1141^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{1141^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 285^0\,28'\,55'' + i\sin 285^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 177)}$$
und
$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 178)}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}26694 - 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 0{,}645 - 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_4$$
(vergl. Erkl. 179 und 180)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

also:

$$x_1 = +2{,}327 + 0{,}645\,i$$
$$x_2 = -2{,}327 - 0{,}645\,i$$

endlich:

$$\sqrt[2]{-(5+3i)} = \sqrt[2]{-5-3i}$$
$$= \pm\left(\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}} - i\cdot\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}}\right)$$
$$= \pm(0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

also:

$$x_3 = +0{,}645 - 2{,}327\,i$$
$$x_4 = -0{,}645 + 2{,}327\,i$$

Demnach erhält man dieselben Werte wie durch nebenstehende Rechnung.

Erkl. 180. Nach einem Satze der Algebra muss die Summe der Wurzeln gleich Null sein. Man erhält für das vorliegende Beispiel:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$$
$$(+2{,}327 + 0{,}645\,i) + (-0{,}645 + 2{,}327\,i) +$$
$$(-2{,}327 - 0{,}645\,i) + (0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

oder:

$$\begin{array}{r} +2{,}327 + 0{,}645\,i \\ -0{,}645 + 2{,}327\,i \\ -2{,}327 - 0{,}645\,i \\ +0{,}645 - 2{,}327\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 65. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zu berechnen.

Erkl. 181. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+4}{+3} = +1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 1{,}3333 \\ \operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270 \\ \hline \text{Rest:}\quad 63 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Mithin kommen zum Winkel 53^0 noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\,\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Es ist also $\varphi = 53^0\,7'\,47''$.

Erkl. 182. Es gibt:

$$\cos 77^0\,40' = 0{,}21360$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6\cdot 28{,}4 = 74$. Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Mithin ist:

$$\begin{array}{r} \cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21360 \\ - \quad 74 \\ \hline = 0{,}21286 \end{array}$$

Auflösung. Da sich:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zerlegen lässt in:

$$\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{3+4i}$$

so erfolgt die Berechnung von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 82 abgeleiteten Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$ (siehe auch Erkl. 188)

Es ist:

$a = 3;\quad b = 4;\quad r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$n = 3;\quad k = 0,\ 1$ und 2

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ (denn $1{,}71^3 = 5$)

$\varphi = 53^0\,7'\,47''$ (nach Erkl. 181)

Erkl. 183. Man erhält für:

$$\sin 77^0\,40' = 0{,}97692$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6 \cdot 6{,}2 = 16$. Letztere ist beim Sinus zu addieren. Demnach gibt:

$$\begin{aligned} \sin 77^0\,42'\,36'' &= 0{,}97692 \\ &+\quad 16 \\ &= 0{,}97708 \end{aligned}$$

Erkl. 184. Da:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -\cos(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\cos 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}95284 \quad (= -\cos 17^0\,40') \\ &\quad -\quad 23 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}95261 \end{aligned}$$

Erkl. 185. Da:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -\sin(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\sin 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}30348 \quad (= -\sin 17^0\,40') \\ &\quad +\quad 72 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}30420 \end{aligned}$$

Erkl. 186. Da:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= +\cos(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= \cos 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= 0{,}74120 \quad (= \cos 42^0\,10') \\ &\quad -\quad 145 \quad (= \text{Diff. für } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= 0{,}73975 \end{aligned}$$

Erkl. 187. Da:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -\sin(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= -\sin 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -0{,}67129 \quad (= -\sin 42^0\,10') \\ &\quad +\quad 159 \quad (= \text{Diff. f. } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= -0{,}67288 \end{aligned}$$

Erkl. 188. Es lassen sich auch die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

nach der anderen Formel der Antwort auf Frage 82, nämlich nach:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

berechnen. Dann erhält man für:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4}{-3} = +1{,}333\cdots$$

also:

$$\varphi = 180^0 + 53^0\,7'\,47'' = 233^0\,7'\,47''$$

Mithin erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i \sin 77^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21286 \quad \text{(nach Erkl. 182)}$$

und

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97708 \quad \text{(nach Erkl. 183)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}21286 + 0{,}97708\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 0{,}364 + 1{,}671\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{593^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{593^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i \sin 197^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

oder, da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95261 \quad \text{(nach Erkl. 184)}$$

und

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30420 \quad \text{(nach Erkl. 185)}$$

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (-0{,}95261 - 0{,}30420\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = -1{,}629 - 0{,}520\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{953^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{953^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i \sin 317^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und für:

$$k = 0.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$
$$= 0{,}364 + 1{,}671\,i$$

$$k = 1.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$
$$= -1{,}629 - 0{,}520\,i$$

$$k = 2.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$
$$= 1{,}265 - 1{,}151\,i$$

oder, da:

$\cos 317^0\,42'\,36'' = +0{,}73975$ (nach Erkl. 186)

und

$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67288$ (nach Erkl. 187)

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}73975 - 0{,}67288\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = +1{,}265 - 1{,}151\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 188 und 189)

Erkl. 189. Nach Erkl. 180 muss:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort oder vorstehender Erklärung:

$$\begin{array}{r} +0{,}364 + 1{,}671\,i \\ -1{,}629 - 0{,}520\,i \\ +1{,}265 - 1{,}151\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 66. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[5]{+32}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 erhält man für:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Im vorliegenden Beispiele ist:

$$a = 32; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{32} = 2$$
$$n = 5; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

Folglich ergibt sich für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2 \cdot (1 + 0) = +2 \;\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2 \cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{2 \cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 72^0 + i\sin 72^0)$$
$$= 2 \cdot (0{,}30902 + i \cdot 0{,}95106)$$
$$= 0{,}61804 + 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{4\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 144^0 + i\sin 144^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 + i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 + i\cdot 0{,}58779)$$
$$= -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{6\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{6\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 216^0 + i\sin 216^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 - i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 - 0{,}58779\,i)$$
$$= -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{8\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{8\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 288^0 + i\sin 288^0)$$
$$= 2\cdot(\cos 72^0 - i\sin 72^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(0{,}30902 - 0{,}95106\,i)$$
$$= 0{,}61804 - 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

(vergl. Erkl. 190)

Erkl. 190. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort:

$$\begin{array}{r} +2 \\ +0{,}61804 + 1{,}90212\,i \\ -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \\ -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \\ +0{,}61804 - 1{,}90212\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 67. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[6]{-729}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 ist:

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a = 729$; $k = 0, 1, 3, 4$ und 5; $n = 6$;

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[6]{729} = 3$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= 2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 3\cdot(0 + i) = 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 210^0 + i\sin 210^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59808 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 3\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

6) $k = 5.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= +2{,}59809 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_6$$
(vergl. Erkl. 191)

Erkl. 191. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ +3{,}0\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -3\,i \\ +2{,}59809 - 1{,}5\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 68. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{216\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{+a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$a = 216; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[3]{216} = 6$$
$$n = 3; \qquad k = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 6\cdot(0{,}86603 + i\cdot 0{,}5)$$
$$= 5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 6\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= -5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 192. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +5{,}19618 + 3i \\ -5{,}19618 + 3i \\ -6i \\ \hline = 0 \end{array}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{216\,i} &= 6\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right) \\ &= 6\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0) \\ &= 6\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -6i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 192)

Aufgabe 69. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{-16\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{-a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$

Im gegebenen Wurzelausdruck ist:

$$a = 16; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3; \qquad n = 4$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 67^0\,30' + i\sin 67^0\,30') \\ &= 2\cdot(0{,}38268 + 0{,}92388\,i) \\ &= 0{,}76536 + 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\; x_1 \end{aligned}$$

Erkl. 193. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

sein. Die nebenstehende Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} +0{,}76536 + 1{,}84776\,i \\ -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \\ -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \\ +1{,}84776 - 0{,}76536\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

2) $k = 1.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 157^0\,30' + i\sin 157^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 22^0\,30' + i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 2\cdot(-0{,}92388 + 0{,}38268\,i) \\ &= -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 \end{aligned}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 247^0\,30' + i\sin 247^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 67^0\,30' - i\sin 67^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

4) $k = 3.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{15\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{15\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 337^0\,30' + i\sin 337^0\,30') \\ &= 2\cdot(\cos 22^0\,30' - i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}84776 - 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_4 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 193)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von nachfolgenden Wurzelausdrücken sind die verschiedenen Werte zu berechnen:

a) $\sqrt[3]{35-23i}$

b) $\sqrt[4]{-15+\sqrt{-31}}$

c) $\sqrt[4]{+625}$

d) $\sqrt[5]{-243}$

e) $\sqrt[3]{+27i}$

f) $\sqrt{-81i}$

Andeutungen.

a) Die Auflösung hat nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

zu erfolgen.

b) Die Auflösung kann nach vorstehender Formel oder nach der Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]+i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

erfolgen; im ersteren Falle ist für $\operatorname{tg}\varphi=\frac{+\sqrt{31}}{-15}$, im letzteren $=\frac{-\sqrt{31}}{+15}$ zu setzen (siehe Aufgabe 65 und Erkl. 188).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 66.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 67.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 68.

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 69.

---

b) Ueber das graphische Radizieren.

Anmerkung 10. Da sich die graphische Darstellung von Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht ohne Berechnung einzelner Teile der Wurzeln ausführen lässt, so begnügen wir uns hier mit der graphischen Darstellung der Quadratwurzeln.

Frage 86. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt?

Antwort. (Fig. 26.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq=+a$ und $os=+bi$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Radikandus dar.

Man verbinde p_1 mit o, halbiere den Winkel $p_1oq=\varphi$, weil:

$$\sqrt[2]{a+bi}=\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist (nach Antwort auf Frage 80), und trage von o aus auf dieser Halbierungslinie das Stück $\sqrt[2]{r}$ oder, da $r=\sqrt[2]{a^2+b^2}$ ist, das Stück $\sqrt[2]{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $\sqrt[4]{a^2+b^2}$