Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufagebn

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

so erhält man:

$$\sqrt[n]{a+bi} = A+Bi$$

und

$$\sqrt[n]{a-bi} = A-Bi$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

„Zieht man aus zwei konjugierten komplexen Zahlen dieselbe Wurzel, so erhält man konjugierte Werte."

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 64. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{16+30i}$$

zu berechnen.

Erkl. 170. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+30}{+16} = +1{,}875$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= 1{,}8750 \\ \operatorname{tg} 61^0\,50' &= 1{,}8676 \\ \text{Rest:} & \quad 74 \end{aligned}$$

Differenz für 1 Minute = 13,1. Mithin kommen zum Winkel $61^0\,50'$ noch:

$$\frac{74}{13{,}1} = 5\frac{85'}{131} = 5'\,39''$$

Demnach ist $\varphi = 61^0\,55'\,39''$.

Erkl. 171. Man erhält für:

$$\cos 15^0\,20' = 0{,}96440$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 7{,}7 = 69$$

Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Folglich gibt:

$$\begin{aligned} \cos 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}96440 \\ &- \quad 69 \\ &= 0{,}96371 \end{aligned}$$

Erkl. 172. Es gibt:

$$\sin 15^0\,20' = 0{,}26443$$

Differenz für:

$$8\frac{11'}{12} = 8\frac{11}{12}\cdot 28{,}1 = 251$$

Letztere ist beim Sinus zu addieren. Man erhält also:

$$\begin{aligned} \sin 15^0\,28'\,55'' &= 0{,}26443 \\ &+ \quad 251 \\ &= 0{,}26694 \end{aligned}$$

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Beispiel ist:

$$a = 16; \qquad bi = 30i$$

$$r = \sqrt{16^2+30^2} = \sqrt{1156} = 34$$

$$n = 4; \qquad k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3$$

$$\sqrt[n]{r} = \sqrt[4]{34} = \sqrt{5{,}83095} = 2{,}415$$

$$\varphi = 61^0\,55'\,39'' \text{ (nach Erkl. 170)}$$

Folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+0^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot(\cos 15^0\,28'\,55'' + i\sin 15^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 15^0\,28'\,55'' = 0{,}96371 \text{ (nach Erkl. 171)}$$

und

$$\sin 15^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \text{ (nach Erkl. 172)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}96371 + 0{,}26694\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}327 + 0{,}645\,i \ldots\ldots\ldots x_1$$

2) $k = 1$.

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0 55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39''+2\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{421^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{421^0\,55'\,39''}{4}\right)$$

$$= 2{,}415\cdot(\cos 105^0 28'\,55'' + i\sin 105^0 28'\,55'')$$

Erkl. 173. Da:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -\cos(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
oder:
$$= -\cos 73^0\,31'\,5''$$
ist, so ergibt sich für:
$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26724 \quad (= -\cos 73^0\,30'')$$
$$-\quad 30 \quad \left(= \text{Diff. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= -0{,}26694$$

Erkl. 174. Es ist:

$$\sin 105^0\,28'\,55'' = \sin(180^0 - 105^0\,28'\,55'')$$
$$= \sin 73^0\,31'\,5''$$
Mithin gibt:
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = 0{,}96363 \quad (= \sin 73^0\,30')$$
$$+\quad 8 \quad \left(= \text{Differ. für } 1\tfrac{1'}{12}\right)$$
$$= 0{,}96371$$

Erkl. 175. Es ist:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -\cos(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\cos 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 171)}$$

Erkl. 176. Es ist:

$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -\sin(195^0\,28'\,55'' - 180^0)$$
$$= -\sin 15^0\,28'\,55''$$
$$= -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 172)}$$

Erkl. 177. Man erhält für:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = +\cos(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= \cos 74^0\,31'\,5''$$
$$= 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$

Erkl. 178. Man erhält für:

$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -\sin(360^0 - 285^0\,28'\,55'')$$
$$= -\sin 74^0\,31'\,5''$$
$$= -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$

Erkl. 179. Da:

$$\sqrt[4]{16+30i} = \sqrt{\sqrt{16+30i}}$$
ist (nach Erkl. 8), so lassen sich die verschiedenen Werte von:
$$\sqrt[4]{16+30i}$$
mit Hilfe der Antwort auf Frage 51 berechnen. Man erhält:
$$\sqrt[2]{16+30i} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{16+\sqrt{256+900}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-16+\sqrt{256+900}}{2}}\right) = \pm(5+3i)$$
ferner:
$$\sqrt[2]{+(5+3i)} = \pm\left(\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}} + i\cdot\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}}\right) = \pm(2{,}327+0{,}645i)$$

Nun gibt:

$$\cos 105^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 173)}$$
und
$$\sin 105^0\,28'\,55'' = +0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 174)}$$
folglich ist:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}26694 + 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -0{,}645 + 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 4\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}415\cdot\left(\cos\frac{781^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{781^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 195^0\,28'\,55'' + i\sin 195^0\,28'\,54'')$$

Nun erhält man für:

$$\cos 195^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 175)}$$
und für:
$$\sin 195^0\,28'\,55'' = -0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 176)}$$
folglich gibt:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(-0{,}96371 - 0{,}26694i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = -2{,}327 - 0{,}645i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot\left[\cos\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right) + i\sin\left(\frac{61^0\,55'\,39'' + 6\cdot 180^0}{4}\right)\right] = 2{,}414\cdot\left(\cos\frac{1141^0\,55'\,39''}{4} + i\sin\frac{1141^0\,55'\,39''}{4}\right)$$
$$= 2{,}415\cdot(\cos 285^0\,28'\,55'' + i\sin 285^0\,28'\,55'')$$

Nun ist:

$$\cos 285^0\,28'\,55'' = 0{,}26694 \quad \text{(nach Erkl. 177)}$$
und
$$\sin 285^0\,28'\,55'' = -0{,}96371 \quad \text{(nach Erkl. 178)}$$

Mithin gibt:

$$\sqrt[4]{16+30i} = 2{,}415\cdot(0{,}26694 - 0{,}96371i)$$
oder auf 3 Dezimalstellen genau:
$$\sqrt[4]{16+30i} = 0{,}645 - 2{,}327i \;\ldots\ldots\; x_4$$
(vergl. Erkl. 179 und 180)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

also:

$$x_1 = +2{,}327 + 0{,}645\,i$$
$$x_2 = -2{,}327 - 0{,}645\,i$$

endlich:

$$\sqrt[2]{-(5+3i)} = \sqrt[2]{-5-3i}$$
$$= \pm\left(\sqrt[2]{\frac{-5+\sqrt{25+9}}{2}} - i\cdot\sqrt[2]{\frac{5+\sqrt{25+9}}{2}}\right)$$
$$= \pm(0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

also:

$$x_3 = +0{,}645 - 2{,}327\,i$$
$$x_4 = -0{,}645 + 2{,}327\,i$$

Demnach erhält man dieselben Werte wie durch nebenstehende Rechnung.

Erkl. 180. Nach einem Satze der Algebra muss die Summe der Wurzeln gleich Null sein. Man erhält für das vorliegende Beispiel:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 =$$
$$(+2{,}327 + 0{,}645\,i) + (-0{,}645 + 2{,}327\,i) +$$
$$(-2{,}327 - 0{,}645\,i) + (0{,}645 - 2{,}327\,i)$$

oder:

$$\begin{array}{r} +2{,}327 + 0{,}645\,i \\ -0{,}645 + 2{,}327\,i \\ -2{,}327 - 0{,}645\,i \\ +0{,}645 - 2{,}327\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 65. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zu berechnen.

Erkl. 181. Da $\operatorname{tg}\varphi = \frac{+4}{+3} = +1{,}3333\cdots$ ist, so liegt φ im ersten Quadranten. Man erhält:

$$\begin{array}{r} \operatorname{tg}\varphi = 1{,}3333 \\ \operatorname{tg} 53^0\,0' = 1{,}3270 \\ \hline \text{Rest:}\quad 63 \end{array}$$

Differenz für 1 Minute = 8,1. Mithin kommen zum Winkel 53^0 noch:

$$\frac{63}{8{,}1} = 7\,\frac{7'}{9} = 7'\,47''$$

Es ist also $\varphi = 53^0\,7'\,47''$.

Erkl. 182. Es gibt:

$$\cos 77^0\,40' = 0{,}21360$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6\cdot 28{,}4 = 74$. Letztere ist beim Cosinus zu subtrahieren. Mithin ist:

$$\begin{array}{r} \cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21360 \\ - \quad 74 \\ \hline = 0{,}21286 \end{array}$$

Auflösung. Da sich:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

zerlegen lässt in:

$$\sqrt[3]{-1}\cdot\sqrt[3]{3+4i}$$

so erfolgt die Berechnung von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

mit Hilfe der in der Antwort auf Frage 82 abgeleiteten Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$ (siehe auch Erkl. 188)

Es ist:

$a = 3;\quad b = 4;\quad r = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

$n = 3;\quad k = 0,\ 1$ und 2

$\sqrt[n]{r} = \sqrt[3]{5} = 1{,}71$ (denn $1{,}71^3 = 5$)

$\varphi = 53^0\,7'\,47''$ (nach Erkl. 181)

Erkl. 183. Man erhält für:

$$\sin 77^0\,40' = 0{,}97692$$

Differenz für $2{,}6' = 2{,}6 \cdot 6{,}2 = 16$. Letztere ist beim Sinus zu addieren. Demnach gibt:

$$\begin{aligned} \sin 77^0\,42'\,36'' &= 0{,}97692 \\ &+\quad 16 \\ &= 0{,}97708 \end{aligned}$$

Erkl. 184. Da:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -\cos(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\cos 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}95284 \quad (= -\cos 17^0\,40') \\ &\quad -\quad 23 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}95261 \end{aligned}$$

Erkl. 185. Da:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -\sin(197^0\,42'\,36'' - 180^0) \\ &= -\sin 17^0\,42'\,36'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 197^0\,42'\,36'' &= -0{,}30348 \quad (= -\sin 17^0\,40') \\ &\quad +\quad 72 \quad (= \text{Diff. für } 2{,}6') \\ &= -0{,}30420 \end{aligned}$$

Erkl. 186. Da:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= +\cos(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= \cos 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so erhält man für:

$$\begin{aligned} \cos 317^0\,42'\,36'' &= 0{,}74120 \quad (= \cos 42^0\,10') \\ &\quad -\quad 145 \quad (= \text{Diff. für } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= 0{,}73975 \end{aligned}$$

Erkl. 187. Da:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -\sin(360^0 - 317^0\,42'\,36'') \\ &= -\sin 42^0\,17'\,24'' \end{aligned}$$

ist, so ergibt:

$$\begin{aligned} \sin 317^0\,42'\,36'' &= -0{,}67129 \quad (= -\sin 42^0\,10') \\ &\quad +\quad 159 \quad (= \text{Diff. f. } 7{,}4 \text{ Min.}) \\ &= -0{,}67288 \end{aligned}$$

Erkl. 188. Es lassen sich auch die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{-3-4i}$$

nach der anderen Formel der Antwort auf Frage 82, nämlich nach:

$$\sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

berechnen. Dann erhält man für:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-4}{-3} = +1{,}333\cdots$$

also:

$$\varphi = 180^0 + 53^0\,7'\,47'' = 233^0\,7'\,47''$$

Mithin erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (0+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i \sin 77^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\cos 77^0\,42'\,36'' = 0{,}21286 \quad \text{(nach Erkl. 182)}$$

und

$$\sin 77^0\,42'\,36'' = 0{,}97708 \quad \text{(nach Erkl. 183)}$$

folglich gibt:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}21286 + 0{,}97708\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 0{,}364 + 1{,}671\,i \;\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (2+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{593^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{593^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i \sin 197^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

oder, da:

$$\cos 197^0\,42'\,36'' = -0{,}95261 \quad \text{(nach Erkl. 184)}$$

und

$$\sin 197^0\,42'\,36'' = -0{,}30420 \quad \text{(nach Erkl. 185)}$$

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (-0{,}95261 - 0{,}30420\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = -1{,}629 - 0{,}520\,i \;\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-3-4i} &= 1{,}71 \cdot \left\{\cos\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{53^0\,7'\,47'' + (4+1)\cdot 180^0}{3}\right]\right\} \\ &= 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{953^0\,7'\,47''}{3} + i \sin\frac{953^0\,7'\,47''}{3}\right) \\ &= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i \sin 317^0\,42'\,36'') \end{aligned}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

und für:

$$k = 0.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left(\cos\frac{233^0\,7'\,47''}{3} + i\sin\frac{233^0\,7'\,47''}{3}\right)$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 77^0\,42'\,36'' + i\sin 77^0\,42'\,36'')$$
$$= 0{,}364 + 1{,}671\,i$$

$$k = 1.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 360^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 197^0\,42'\,36'' + i\sin 197^0\,42'\,36'')$$
$$= -1{,}629 - 0{,}520\,i$$

$$k = 2.$$

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot \left[\cos\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{233^0\,7'\,47'' + 720^0}{3}\right)\right]$$
$$= 1{,}71 \cdot (\cos 317^0\,42'\,36'' + i\sin 317^0\,42'\,36'')$$
$$= 1{,}265 - 1{,}151\,i$$

oder, da:

$\cos 317^0\,42'\,36'' = +0{,}73975$ (nach Erkl. 186)

und

$\sin 317^0\,42'\,36'' = -0{,}67288$ (nach Erkl. 187)

ist:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = 1{,}71 \cdot (0{,}73975 - 0{,}67288\,i)$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt[3]{-3-4i} = +1{,}265 - 1{,}151\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

(vergl. Erkl. 188 und 189)

Erkl. 189. Nach Erkl. 180 muss:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort oder vorstehender Erklärung:

$$\begin{array}{r} +0{,}364 + 1{,}671\,i \\ -1{,}629 - 0{,}520\,i \\ +1{,}265 - 1{,}151\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 66. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[5]{+32}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 erhält man für:

$$\sqrt[n]{+a} = \sqrt[n]{a} \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Im vorliegenden Beispiele ist:

$$a = 32; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{32} = 2$$
$$n = 5; \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

Folglich ergibt sich für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot (\cos 0^0 + i\sin 0^0) = 2 \cdot (1 + 0) = +2 \;\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2 \cdot \left(\cos\frac{2 \cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{2 \cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2 \cdot (\cos 72^0 + i\sin 72^0)$$
$$= 2 \cdot (0{,}30902 + i \cdot 0{,}95106)$$
$$= 0{,}61804 + 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{4\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{4\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 144^0 + i\sin 144^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 + i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 + i\cdot 0{,}58779)$$
$$= -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{6\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{6\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 216^0 + i\sin 216^0)$$
$$= 2\cdot(-\cos 36^0 - i\sin 36^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(-0{,}80902 - 0{,}58779\,i)$$
$$= -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \;\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[5]{+32} = 2\cdot\left(\cos\frac{8\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{8\cdot 180^0}{5}\right)$$
$$= 2\cdot(\cos 288^0 + i\sin 288^0)$$
$$= 2\cdot(\cos 72^0 - i\sin 72^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 2\cdot(0{,}30902 - 0{,}95106\,i)$$
$$= 0{,}61804 - 1{,}90212\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

(vergl. Erkl. 190)

Erkl. 190. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

sein. Man erhält nach nebenstehender Antwort:

$$\begin{array}{r} +2 \\ +0{,}61804 + 1{,}90212\,i \\ -1{,}61804 + 1{,}17558\,i \\ -1{,}61804 - 1{,}17558\,i \\ +0{,}61804 - 1{,}90212\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 67. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[6]{-729}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 83 ist:

$$\sqrt[n]{-a} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$a = 729$; $k = 0, 1, 3, 4$ und 5; $n = 6$;

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[6]{729} = 3$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= 2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$
$$= 3\cdot(0 + i) = 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

3) $k = 2.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 + 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59809 + 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_3$$

4) $k = 3.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 210^0 + i\sin 210^0)$$
$$= 3\cdot(-\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(-0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= -2{,}59808 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_4$$

5) $k = 4.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$
$$= 3\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_5$$

6) $k = 5.$

$$\sqrt[6]{-729} = 3\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 3\cdot(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$$
$$= 3\cdot(\cos 30^0 - i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= 3\cdot(0{,}86603 - 0{,}5\,i)$$
$$= +2{,}59809 - 1{,}5\,i \;\ldots\ldots\ldots\; x_6$$
(vergl. Erkl. 191)

Erkl. 191. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ +3{,}0\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -2{,}59809 + 1{,}5\,i \\ -3\,i \\ +2{,}59809 - 1{,}5\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Aufgabe 68. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[3]{216\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{+a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+1)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2n}\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$a = 216; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[3]{216} = 6$$
$$n = 3; \qquad k = 0,\ 1 \text{ und } 2$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{180^0}{6} + i\sin\frac{180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 30^0 + i\sin 30^0)$$
$$= 6\cdot(0{,}86603 + i\cdot 0{,}5)$$
$$= 5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_1$$

2) $k = 1.$

$$\sqrt[3]{216\,i} = 6\cdot\left(\cos\frac{5\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{5\cdot 180^0}{6}\right)$$
$$= 6\cdot(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$$
$$= 6\cdot(-\cos 30^0 + i\sin 30^0) \text{ (n. Erkl. 101)}$$
$$= -5{,}19618 + 3\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Erkl. 192. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

sein. Nach nebenstehender Rechnung erhält man:

$$\begin{array}{r} +5{,}19618 + 3i \\ -5{,}19618 + 3i \\ -6i \\ \hline = 0 \end{array}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{216\,i} &= 6\cdot\left(\cos\frac{9\cdot 180^0}{6} + i\sin\frac{9\cdot 180^0}{6}\right) \\ &= 6\cdot(\cos 270^0 + i\sin 270^0) \\ &= 6\cdot(0 - i) \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -6i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 192)

Aufgabe 69. Es sind die verschiedenen Werte von:

$$\sqrt[4]{-16\,i}$$

zu berechnen.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 84 ist:

$$\sqrt[n]{-a\,i} = \sqrt[n]{a}\cdot\left[\cos\frac{(4k+3)\pi}{2n} + i\sin\frac{(4k+3)\pi}{2n}\right]$$

Im gegebenen Wurzelausdruck ist:

$$a = 16; \qquad \sqrt[n]{a} = \sqrt[4]{16} = 2$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \text{ und } 3; \qquad n = 4$$

folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{3\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{3\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 67^0\,30' + i\sin 67^0\,30') \\ &= 2\cdot(0{,}38268 + 0{,}92388\,i) \\ &= 0{,}76536 + 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\; x_1 \end{aligned}$$

Erkl. 193. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

sein. Die nebenstehende Rechnung ergibt:

$$\begin{array}{r} +0{,}76536 + 1{,}84776\,i \\ -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \\ -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \\ +1{,}84776 - 0{,}76536\,i \\ \hline = 0 \end{array}$$

2) $k = 1.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{7\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{7\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 157^0\,30' + i\sin 157^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 22^0\,30' + i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 2\cdot(-0{,}92388 + 0{,}38268\,i) \\ &= -1{,}84776 + 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_2 \end{aligned}$$

3) $k = 2.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{11\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{11\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 247^0\,30' + i\sin 247^0\,30') \\ &= 2\cdot(-\cos 67^0\,30' - i\sin 67^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= -0{,}76536 - 1{,}84776\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_3 \end{aligned}$$

4) $k = 3.$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-16\,i} &= 2\cdot\left(\cos\frac{15\cdot 180^0}{8} + i\sin\frac{15\cdot 180^0}{8}\right) \\ &= 2\cdot(\cos 337^0\,30' + i\sin 337^0\,30') \\ &= 2\cdot(\cos 22^0\,30' - i\sin 22^0\,30') \quad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}84776 - 0{,}76536\,i \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; x_4 \end{aligned}$$

(vergl. Erkl. 193)

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg