Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

b) Ueber das graphische Radizieren

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 70. Von nachfolgenden Wurzelausdrücken sind die verschiedenen Werte zu berechnen:

a) $\sqrt[3]{35-23i}$

b) $\sqrt[4]{-15+\sqrt{-31}}$

c) $\sqrt[4]{+625}$

d) $\sqrt[5]{-243}$

e) $\sqrt[3]{+27i}$

f) $\sqrt{-81i}$

Andeutungen.

a) Die Auflösung hat nach der Formel:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

zu erfolgen.

b) Die Auflösung kann nach vorstehender Formel oder nach der Formel:

$$\sqrt[n]{-(a+bi)}=\sqrt[n]{r}\cdot\left\{\cos\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]+i\sin\left[\frac{\varphi+(2k+1)\pi}{n}\right]\right\}$$

erfolgen; im ersteren Falle ist für $\operatorname{tg}\varphi=\frac{+\sqrt{31}}{-15}$, im letzteren $=\frac{-\sqrt{31}}{+15}$ zu setzen (siehe Aufgabe 65 und Erkl. 188).

c) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 66.

d) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 67.

e) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 68.

f) Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 69.

---

b) Ueber das graphische Radizieren.

Anmerkung 10. Da sich die graphische Darstellung von Wurzeln aus komplexen Zahlen nicht ohne Berechnung einzelner Teile der Wurzeln ausführen lässt, so begnügen wir uns hier mit der graphischen Darstellung der Quadratwurzeln.

Frage 86. Wie findet man in der Zahlenebene durch Zeichnung den Punkt, welcher die Quadratwurzel einer komplexen Zahl $a+bi$ darstellt?

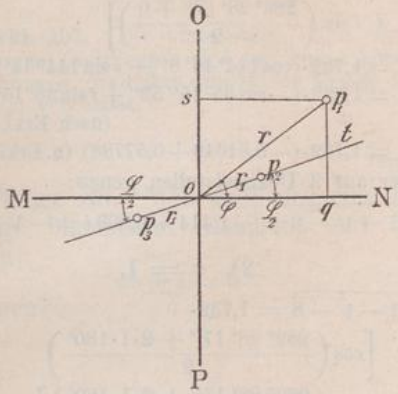
Antwort. (Fig. 26.) Man errichte in den Endpunkten der Strecken $oq=+a$ und $os=+bi$ auf MN bezw. OP Normale; ihr Schnittpunkt p_1 stellt dann den gegebenen Radikandus dar.

Man verbinde p_1 mit o, halbiere den Winkel $p_1oq=\varphi$, weil:

$$\sqrt[2]{a+bi}=\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

ist (nach Antwort auf Frage 80), und trage von o aus auf dieser Halbierungslinie das Stück $\sqrt[2]{r}$ oder, da $r=\sqrt[2]{a^2+b^2}$ ist, das Stück $\sqrt[2]{\sqrt{a^2+b^2}}$ oder $\sqrt[4]{a^2+b^2}$

Figur 26.



(nach Erkl. 8) ab. Der Endpunkt p_2 dieser Strecke stellt dann $\sqrt{a+bi}$ dar.

Da jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, so muss es noch einen zweiten Punkt geben, welcher $\sqrt{a+bi}$ darstellt. Dieser Punkt (p_3) liegt auf der Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels φ und ist ebenfalls um das Stück $\sqrt{r}$ vom Nullpunkte entfernt.

Beweis. Die zu p_3 gehörende komplexe Zahl ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left[\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

oder, da:

$$\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\quad\text{(n. Erkl. 101)}$$

ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder:

$$-\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

d. i. das Entgegengesetzte von:

$$+\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Summe beider Werte gibt 0, wie es der Satz in Erkl. 180 verlangt.

α) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 71. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}}$$

zu berechnen und graphisch darzustellen.

Erkl. 194. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{8}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: }\ 45$$

Differenz für 1 Minute = 26,3. Mithin kommt zum Winkel 70° 30′ noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\,\frac{187'}{263}=1'\,43''$$

Demnach ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Auflösung. (Figur 27.) Nach Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$n=2;\quad a=1;\quad b=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{1^2+(\sqrt{8})^2}}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=1{,}732\cdots$$

$$k=0\text{ und }1;\quad\varphi=289^0\,28'\,17''\quad\text{(n. Erkl. 194)}$$

Erkl. 195. Man erhält für:

$$\begin{aligned}\cos 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}81748 \quad (= \cos 35^0\,10') \\ &\quad - \quad 99 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}81649 \\ \sin 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}57596 \quad (= \sin 35^0\,10') \\ &\quad + \quad 140 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}57736\end{aligned}$$

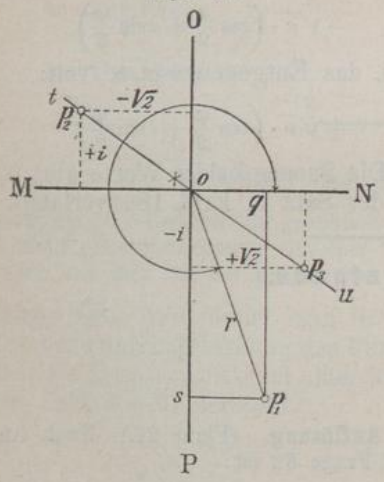
Erkl. 196. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 = 0$$

sein. Aus nebenstehender Rechnung folgt:

$$\begin{array}{r} -\sqrt{2} + i \\ +\sqrt{2} - i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Figur 27.



folglich erhält man für:

1) $k = 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 144^0\,44'\,8'' + i \sin 144^0\,44'\,8'') \\ &= 1{,}732 \cdot (-\cos 35^0\,15''\,52'' + i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (-0{,}81649 + 0{,}57736) \quad \text{(n. Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = -1{,}414 + 0{,}999\,i = -\sqrt{2} + i$$

2) $k = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \\ &\quad \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot \left(\cos \frac{649^0\,28'\,17''}{2} + i \sin \frac{649^0\,28'\,17''}{2}\right) \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 324^0\,44'\,8'' + i \sin 324^0\,44'\,8'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 131)} \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 35^0\,15'\,52'' - i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (0{,}81649 - 0{,}57736) \quad \text{(nach Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}414 - 0{,}999\,i = \sqrt{2} - i$$

(vergl. Erkl. 196)

Die diese beiden Werte in der Zahlenebene darstellenden Punkte findet man auf folgende Weise:

Man errichtet in den Endpunkten der Strecken $oq = +1$ und $os = -\sqrt{-8} = -2{,}828\,i$ auf MN bezw. OP Normale, verbinde ihren Schnittpunkt p_1 mit o, halbiere den Winkel qop_1 und trage auf tu von o nach beiden Seiten hin die Strecke:

$$r_1 = \sqrt{r} = 1{,}732$$

ab; die Endpunkte p_2 und p_3 sind die gesuchten Punkte von:

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{-8}}$$

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 72. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt[2]{3+4i}$$

rechnerisch und graphisch zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 71.