Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

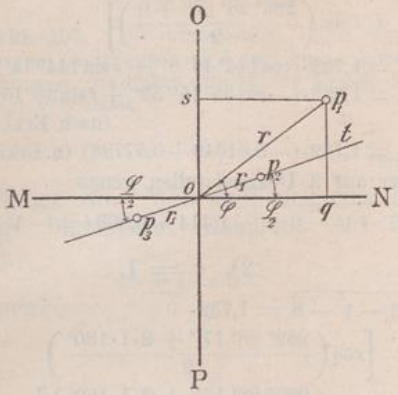
Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgabe

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Figur 26.



(nach Erkl. 8) ab. Der Endpunkt p_2 dieser Strecke stellt dann $\sqrt{a+bi}$ dar.

Da jede Quadratwurzel zwei Werte hat, die sich nur durch das Vorzeichen von einander unterscheiden, so muss es noch einen zweiten Punkt geben, welcher $\sqrt{a+bi}$ darstellt. Dieser Punkt (p_3) liegt auf der Verlängerung der Halbierungslinie des Winkels φ und ist ebenfalls um das Stück $\sqrt{r}$ vom Nullpunkte entfernt.

Beweis. Die zu p_3 gehörende komplexe Zahl ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left[\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

oder, da:

$$\cos\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\cos\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\sin\left(180^0+\frac{\varphi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\quad\text{(n. Erkl. 101)}$$

ist:

$$\sqrt[2]{r}\cdot\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

oder:

$$-\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

d. i. das Entgegengesetzte von:

$$+\sqrt[2]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

Die Summe beider Werte gibt 0, wie es der Satz in Erkl. 180 verlangt.

α) Gelöste Aufgabe.

Aufgabe 71. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}}$$

zu berechnen und graphisch darzustellen.

Erkl. 194. Da $\operatorname{tg}\varphi=\frac{-\sqrt{8}}{+1}=-2{,}8284$ ist, so liegt φ im vierten Quadranten (siehe Erkl. 102). Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi=2{,}8284$$
$$\operatorname{tg}70^0\,30'=2{,}8239$$
$$\text{Rest: }\ 45$$

Differenz für 1 Minute = 26,3. Mithin kommt zum Winkel 70° 30′ noch:

$$\frac{45}{26{,}3}=1\,\frac{187'}{263}=1'\,43''$$

Demnach ist:

$$\varphi=360^0-70^0\,31'\,43''=289^0\,28'\,17''$$

Auflösung. (Figur 27.) Nach Antwort auf Frage 82 ist:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right]$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$n=2;\quad a=1;\quad b=\sqrt{8}$$

$$\sqrt[n]{r}=\sqrt[2]{\sqrt[2]{1^2+(\sqrt{8})^2}}=\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}=1{,}732\cdots$$

$$k=0\text{ und }1;\quad\varphi=289^0\,28'\,17''\quad\text{(n. Erkl. 194)}$$

Erkl. 195. Man erhält für:

$$\begin{aligned}\cos 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}81748 \quad (= \cos 35^0\,10') \\ &\quad - \quad 99 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}81649 \\ \sin 35^0\,15'\,52'' &= 0{,}57596 \quad (= \sin 35^0\,10') \\ &\quad + \quad 140 \quad \left(= \text{Differenz für } 5\tfrac{13'}{15}\right) \\ &= 0{,}57736\end{aligned}$$

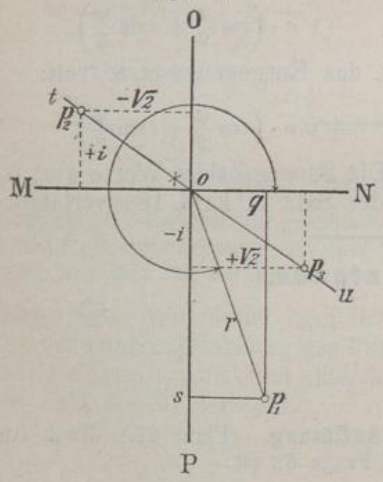
Erkl. 196. Nach Erkl. 180 soll:

$$x_1 + x_2 = 0$$

sein. Aus nebenstehender Rechnung folgt:

$$\begin{array}{r} -\sqrt{2} + i \\ +\sqrt{2} - i \\ \hline = 0 \end{array}$$

Figur 27.



folglich erhält man für:

1) $k = 0.$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 144^0\,44'\,8'' + i \sin 144^0\,44'\,8'') \\ &= 1{,}732 \cdot (-\cos 35^0\,15''\,52'' + i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (-0{,}81649 + 0{,}57736) \quad \text{(n. Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = -1{,}414 + 0{,}999\,i = -\sqrt{2} + i$$

2) $k = 1.$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{-8}} &= 1{,}732 \cdot \\ &\quad \left[\cos\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + i \sin\left(\frac{289^0\,28'\,17'' + 2 \cdot 1 \cdot 180^0}{2}\right)\right] \\ &= 1{,}732 \cdot \left(\cos \frac{649^0\,28'\,17''}{2} + i \sin \frac{649^0\,28'\,17''}{2}\right) \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 324^0\,44'\,8'' + i \sin 324^0\,44'\,8'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 131)} \\ &= 1{,}732 \cdot (\cos 35^0\,15'\,52'' - i \sin 35^0\,15'\,52'') \\ &\qquad \text{(nach Erkl. 101)} \\ &= 1{,}732 \cdot (0{,}81649 - 0{,}57736) \quad \text{(nach Erkl. 195)}\end{aligned}$$

oder auf 3 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1-\sqrt{-8}} = 1{,}414 - 0{,}999\,i = \sqrt{2} - i$$

(vergl. Erkl. 196)

Die diese beiden Werte in der Zahlenebene darstellenden Punkte findet man auf folgende Weise:

Man errichtet in den Endpunkten der Strecken $oq = +1$ und $os = -\sqrt{-8} = -2{,}828\,i$ auf MN bezw. OP Normale, verbinde ihren Schnittpunkt p_1 mit o, halbiere den Winkel qop_1 und trage auf tu von o nach beiden Seiten hin die Strecke:

$$r_1 = \sqrt{r} = 1{,}732$$

ab; die Endpunkte p_2 und p_3 sind die gesuchten Punkte von:

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{-8}}$$

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 72. Es sind die beiden Werte von:

$$\sqrt[2]{3+4i}$$

rechnerisch und graphisch zu ermitteln.

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 71.