Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

c) Ueber die Auflösung der binomischen Gleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

c) Ueber die Auflösung der binomischen Gleichungen.

Frage 87. Was versteht man unter einer binomischen Gleichung?

Erkl. 197. Die binomischen (d. h. zweigliedrigen) Gleichungen sind sog. reine höhere Gleichungen, weil ihre unbekannte Grösse nur einmal vorkommt.

Antwort. Unter einer binomischen Gleichung versteht man eine Gleichung von der Form:

$$y^n \pm a = 0$$

in welcher a irgend eine reelle Zahl bedeutet.

Frage 88. Wie lässt sich eine beliebige binomische Gleichung auf die Form:

$$x^n \pm 1 = 0$$

bringen?

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$y^n \pm a = 0$$

für $y^n = ax^n$ oder für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ ein, so erhält man:

$$y^n \pm a = ax^n \pm a = 0$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch a, so ergibt sich:

$$\frac{ax^n}{a} \pm \frac{a}{a} = 0$$

oder:

$$x^n \pm 1 = 0 \quad \text{(nach Erkl. 19)}$$

Auf diese Form kann man jede binomische Gleichung bringen, sobald man für $y = x \cdot \sqrt[n]{a}$ einsetzt.

Die Auflösung binomischer Gleichungen besteht also vorzugsweise in der Aufsuchung der verschiedenen Wurzelwerte der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$.

Frage 89. Wie findet man die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^n \pm 1 = 0?$$

Erkl. 198. Ein Satz aus der Lehre von den Gleichungen lautet:

„Jede Gleichung hat ebensoviele Wurzeln, als der höchste Exponent der Unbekannten Einheiten besitzt."

Hiernach besitzt die Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ n verschiedene Wurzeln.

Antwort. Aus $x^n \pm 1 = 0$ folgt:

$$x^n = \mp 1$$

und

$$x = \sqrt[n]{\mp 1}$$

Demnach sind die Wurzeln der Gleichung $x^n \pm 1 = 0$ dieselben wie die Werte der $n$ten Wurzeln aus der negativen bezw. positiven Einheit.

Nach der Antwort auf Frage 82 war:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

und

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Aus der ersten Formel erhält man sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n - 1 = 0$$

aus der zweiten Formel sämtliche n Wurzeln der Gleichung:

$$x^n + 1 = 0$$

wenn man in diese Formeln für k nacheinander die Werte:

$$0, 1, 2, 3 \cdots (n-1)$$

einsetzt.

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 73. Es sind die verschiedenen Wurzeln der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$
d) $x^5 + 1 = 0$

Erkl. 199. Aus der Lehre von den höheren Gleichungen ergeben sich folgende Sätze:

1) Jede Gleichung von geradem Grade, deren letztes Glied das Minuszeichen führt, hat mindestens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative. [Vergl. die Aufgaben 73, a) und c)].
2) Jede Gleichung von ungeradem Grade hat mindestens eine reelle Wurzel, welche das entgegengesetzte Vorzeichen des letzten Gliedes führt. [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
3) Besitzt eine Gleichung mit reellen Koëffizienten eine Wurzel von der Form $a + bi$, so ist $a - bi$ ebenfalls eine Wurzel dieser Gleichung. (Es kommen hiernach die komplexen Wurzeln stets in gerader Anzahl vor.) [Vergl. die Aufgaben 73, b) und d)].
4) Die reellen Wurzeln einer Gleichung kommen stets in gerader Anzahl vor, wenn die Gleichung von geradem Grade ist, jedoch in ungerader Anzahl, wenn der höchste Exponent der Unbekannten eine ungerade Zahl ist. (Vergl. nebenstehende Aufgabe.)

Auflösungen.

a) Man findet die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 1 = 0$ aus der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

wenn man für $n = 2$ und für k die Werte 0 und 1 einsetzt. Man erhält alsdann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{2}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

(Probe: $x_1 + x_2 = +1 - 1 = 0$; s. Erkl. 180.)

---

b) Die 3 Wurzeln der Gleichung $x^3 + 1 = 0$ findet man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

wenn man in dieselbe für $n = 3$ und für k nacheinander die Werte 0, 1 und 2 einsetzt. Dann ergibt sich für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 60^0 + i\sin 60^0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0i = -1$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{3}$$
$$= \cos 300^0 + i\sin 300^0 = \cos 60^0 - i\sin 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= +\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3} = 0$.)

c) Die Berechnung der 4 Wurzeln der Gleichung $x^4 - 1 = 0$ geschieht mittels der Formel:

$$\sqrt[n]{+1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

in welche man für $n = 4$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2 und 3 einzusetzen hat. Dann erhält man für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot 180^0}{4} = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = +1$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot 180^0}{4} = \cos 90^0 + i\sin 90^0 = +i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot 180^0}{4} = \cos 180^0 + i\sin 180^0$$
$$= -1 + 0i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[4]{+1} = \cos\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot 180^0}{4} = \cos 270^0 + i\sin 270^0 = -i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = +1 + i - 1 - i = 0$.)

d) Die Gleichung $x^5 + 1$ hat 5 Wurzeln, welche man aus der Formel:

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

findet, wenn man in dieselbe für $n = 5$ und für k nacheinander die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 einsetzt. Man erhält dann für:

1) $k = 0$.

$$x_1 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 0+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 36^0 + i\sin 36^0 = 0{,}80902 + 0{,}58779\,i$$

2) $k = 1$.

$$x_2 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 1+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 108^0 + i\sin 108^0 = -\cos 72^0 + i\sin 72^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 + 0{,}95106\,i$$

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0\cdot i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0 \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 - 0{,}95106\,i$$

5) $k = 4$.

$$x_5 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0$$
$$= 0{,}80902 - 0{,}58779\,i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = +0{,}80902 + 0{,}58779\,i - 0{,}30902 + 0{,}95106\,i - 1 - 0{,}30902 - 0{,}95106\,i + 0{,}80902 - 0{,}58779\,i = 0$; vergl. Erkl. 180.)

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 74. Es sind die verschiedenen Werte der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^5 - 1 = 0$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 73, a) bis d).

E. Ueber die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Anmerkung 11. Zum Verständnis dieses Teiles unseres Lehrbuches sind diejenigen Kenntnisse der Goniometrie und der Logarithmenrechnung erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Goniometrie und der Logarithmen von Dr. A. Kleyer erworben werden können.

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Frage 90. Auf welche Weise lässt sich $\cos^n\varphi$ durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Setzt man für:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und für:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a + b = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

und demnach:

$$2^n\cos^n\varphi = (a+b)^n$$