Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

3) $k = 2$.

$$x_3 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 2+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 180^0 + i\sin 180^0 = -1 + 0\cdot i = -1$$

4) $k = 3$.

$$x_4 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 3+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 252^0 + i\sin 252^0 = -\cos 72^0 - i\sin 72^0 \text{ (nach Erkl. 101)}$$
$$= -0{,}30902 - 0{,}95106\,i$$

5) $k = 4$.

$$x_5 = \sqrt[5]{-1} = \cos\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5} + i\sin\frac{(2\cdot 4+1)\cdot 180^0}{5}$$
$$= \cos 324^0 + i\sin 324^0 = \cos 36^0 - i\sin 36^0$$
$$= 0{,}80902 - 0{,}58779\,i$$

(Probe: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = +0{,}80902 + 0{,}58779\,i - 0{,}30902 + 0{,}95106\,i - 1 - 0{,}30902 - 0{,}95106\,i + 0{,}80902 - 0{,}58779\,i = 0$; vergl. Erkl. 180.)

β) Ungelöste Aufgabe.

Aufgabe 74. Es sind die verschiedenen Werte der nachfolgenden binomischen Gleichungen zu berechnen:

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^3 - 1 = 0$
c) $x^4 + 1 = 0$
d) $x^5 - 1 = 0$

Andeutung. Auflösung analog der Auflösung von Aufgabe 73, a) bis d).

E. Ueber die Beziehungen zwischen den Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels und dem Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Anmerkung 11. Zum Verständnis dieses Teiles unseres Lehrbuches sind diejenigen Kenntnisse der Goniometrie und der Logarithmenrechnung erforderlich, welche durch das Studium der in dieser Encyklopädie erschienenen Lehrbücher der Goniometrie und der Logarithmen von Dr. A. Kleyer erworben werden können.

a) Ueber die Darstellung der Potenzen von Sinus und Cosinus eines Winkels durch Sinus und Cosinus vom Vielfachen dieses Winkels.

Frage 90. Auf welche Weise lässt sich $\cos^n\varphi$ durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Setzt man für:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und für:

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a + b = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi = 2\cos\varphi$$

und demnach:

$$2^n\cos^n\varphi = (a+b)^n$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive Ganzzahl ist, folgende Gleichung:

$$2^n \cdot \cos^n \varphi = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \cdots + n a \cdot b^{n-1} + b^n$$

oder, wenn man:

$a^{n-2} \cdot a$ statt a^{n-1}
$a^{n-4} \cdot a^2$ statt a^{n-2}
$a^{n-6} \cdot a^3$ statt a^{n-3}
$b^{n-2} \cdot b$ statt $b^{n-1} \cdots$

setzt:

$$2^n \cdot \cos^n \varphi = a^n + n \cdot a^{n-2} \cdot a b + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-4} \cdot a^2 b^2$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{n-6} \cdot a^3 b^3 + \cdots + n b^{n-2} \cdot a b + b^n$$

Erkl. 200. Dass das mittelste Glied von $(a + b i)^n$ bei geradem n:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+2}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots \frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}}$$

ist und die Reihe eine ungerade Anzahl von Gliedern besitzt, soll durch die folgenden beiden Beispiele nachgewiesen werden.

Man erhält für:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6 a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3$$
$$+ 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6$$

Das mittelste von den 7 Gliedern ist hiernach $20 a^3 b^3$. Setzt man in die Formel:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdots \left(\frac{n+2}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdots\cdots\cdots \frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}}$$

für $n = 6$ ein, so folgt:

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^{\frac{6}{2}} \cdot b^{\frac{6}{2}} = 20 a^3 b^3$$

Ferner gibt:

$$(a+b)^8 = a^8 + 8 a^7 b + 28 a^6 b^2 + 56 a^5 b^3$$
$$+ 70 a^4 b^4 + 56 a^3 b^5 + 28 a^2 b^6 + 8 a b^7 + b^8$$

Das mittelste von diesen 9 Gliedern ist $70 a^4 b^4$. Setzt man in die Formel:

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \left(\frac{n+2}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots\cdots \frac{n}{2}} \cdot a^{\frac{n}{2}} \cdot b^{\frac{n}{2}}$$

für $n = 8$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot a^{\frac{8}{2}} \cdot b^{\frac{8}{2}} = 70 a^4 b^4$$

Vereinigt man das erste und letzte, zweite und vorletzte u. s. w. — kurz, stets die beiden Glieder der vorstehenden Binominalreihe, bei welchen die gleichen Koëffizienten $[n, \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2}, \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ u. s. w.] und die gleichen Potenzen von a und b (ab, $a^2 b^2$, $a^3 b^3$ u. s. w.) vorkommen, so ergibt sich:

$$2^n \cdot \cos^n \varphi = (a^n + b^n) + n \cdot (a^{n-2} + b^{n-2}) \cdot a b$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot (a^{n-4} + b^{n-4}) \cdot a^2 b^2$$
$$+ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (a^{n-6} + b^{n-6}) \cdot a^3 b^3 + \cdots$$

Weil nun:

$$a b = (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - i \sin \varphi) = 1$$

also:

$$a^n \cdot b^n = 1^n = 1$$

ferner:

$$a^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$$

und

$$b^n = (\cos \varphi - i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi - i \sin n \varphi$$

(nach Antwort auf Frage 76)

ist, demnach für:

$$a^n + b^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi + \cos n \varphi - i \sin n \varphi$$
$$= 2 \cos n \varphi$$

also für:

$$a^{n-2} + b^{n-2} = 2 \cdot \cos (n-2) \varphi$$
$$a^{n-4} + b^{n-4} = 2 \cdot \cos (n-4) \varphi \text{ u. s. w.}$$

gesetzt werden kann, so folgt:

Erkl. 201. Dass jedes der beiden mittleren Glieder von $(a+bi)^n$ bei ungeradem n:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot(a+b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

ist und die Reihe eine gerade Anzahl von Gliedern besitzt, soll durch die folgenden beiden Beispiele nachgewiesen werden.

Man erhält für:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Die beiden mittleren von den 8 Gliedern sind hiernach $35a^4b^3$ und $35a^3b^4$. Setzt man in die Formel für $n = 7$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\cdot(a+b)\cdot a^3b^3 = 35a^4b^3 + 35a^3b^4$$

Man erhält ferner für:

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8b + 36a^7b^2 + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36a^2b^7 + 9ab^8 + b^9$$

Die beiden mittleren von den 10 Gliedern sind hiernach $126a^5b^4$ und $126a^4b^5$. Setzt man in die Formel für $n = 9$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot(a+b)\cdot a^4b^4 = 126a^5b^4 + 126a^4b^5$$

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = 2\cos n\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cos(n-4)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cos(n-6)\varphi + \cdots$$

Ist der Exponent n eine gerade Zahl, so besitzt die Binominalreihe eine ungleiche Anzahl von Gliedern und es ist das mittelste Glied dieser Reihe offenbar:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\cdot a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}} \quad \text{(vgl. Erkl. 200)}$$

und weil:

$$a^{\frac{n}{2}}\cdot b^{\frac{n}{2}} = 1 \text{ oder } = 2\cdot\frac{1}{2}$$

ist, so erhält man

für: bei geradem n

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = 2\cos n\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch 2, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot\cos^n\varphi = \cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

oder:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi\cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

Ist der Exponent n eine ungerade Zahl, so hat die Binominalreihe eine gleiche Anzahl von Gliedern und es haben die beiden mittleren Glieder offenbar den Koëffizienten:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad \text{(vergl. Erkl. 201)}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

sowie das eine Glied die Hauptgrösse:

$$a^{\frac{n+1}{2}} \cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

das andere die Hauptgrösse:

$$a^{\frac{n-1}{2}} \cdot b^{\frac{n+1}{2}}$$

Die beiden Glieder geben demnach vereinigt:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left(a^{\frac{n+1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n+1}{2}}\right)$$

oder, da:

$$a^{\frac{n+1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n+1}{2}}=(a+b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot(a+b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}$$

oder endlich, weil:

$$a+b=2\cos\varphi$$

und

$$a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}}=1$$

ist:

$$\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi$$

Man erhält also

bei ungeradem n

für:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi=2\cdot\cos n\varphi+n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots+\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi$$

oder, wenn man die ganze Gleichung durch 2 teilt:

$$2^{n-1}\cdot\cos^n\varphi=\cos n\varphi+n\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi$$

oder endlich:

$$\cos^n\varphi=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\Bigg[\cos n\varphi+n\cdot\cos(n-2)\varphi+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi+\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\cos\varphi\Bigg]$$

Frage 91. Auf welche Weise lässt sich $\sin^n \varphi$ durch den Sinus bezw. Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ ausdrücken?

Antwort. Ist:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = a$$

und

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = b$$

so gibt:

$$a - b = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

also ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a-b)^n$$

Wird die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79) entwickelt, so erhält man, wenn n eine positive Ganzzahl ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = a^n - n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots \pm b^n$$

Setzt man wiederum (wie bei der vorhergehenden Antwort) für:

$$a^{n-1} = a\cdot a^{n-2} \text{ u. s. w.}$$

ein, so ergibt sich:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = a^n - n\cdot a^{n-2}\cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-4}\cdot a^2b^2 - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-6}\cdot a^3b^3 + \cdots + n\cdot ab^{n-1} \pm b^n$$

und nach Vereinigung des ersten und letzten, zweiten und vorletzten u. s. w. Gliedes:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a^n \pm b^n) - n\cdot(a^{n-2} \pm b^{n-2})\cdot ab + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(a^{n-4} \pm b^{n-4})\cdot a^2b^2 - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(a^{n-6} \pm b^{n-6})\cdot a^3b^3 + \cdots$$

oder, weil:

$$ab = a^2b^2 = a^3b^3 = \cdots = +1$$

ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n\varphi = (a^n \pm b^n) - n\cdot(a^{n-2} \pm b^{n-2}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(a^{n-4} \pm b^{n-4}) - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(a^{n-6} \pm b^{n-6}) + \cdots$$

Ist n eine gerade Zahl, so ist das letzte Glied b^n der in ungerader Anzahl vorhandenen Glieder positiv, das vorhergehende negativ u. s. w., und man erhält als erstes Glied auf der rechten Seite vorstehender Gleichung:

$$(a^n + b^n)$$

als zweites Glied:

$$-n\cdot(a^{n-2} + b^{n-2}) \text{ u. s. w. (s. Erkl. 202)}$$

Erkl. 202. In der Binominalreihe für $(a-b)^n$ erhält man dieselben Glieder wie für $(a+b)^n$, nur wechseln bei $(a-b)^n$ die Vorzeichen der Glieder regelmässig ab. Da bei geradem n sich eine ungleiche Anzahl von Gliedern ergibt, da das erste Glied stets positiv, das zweite stets negativ ist, so trägt das letzte Glied das Pluszeichen. Da ferner bei ungeradem n die Reihe eine gerade Anzahl von Gliedern hat und das erste, dritte, fünfte u. s. w. immer das Pluszeichen, dagegen

das zweite, vierte, sechste u. s. w. immer das Minuszeichen führt, so ist das letzte Glied negativ.

Setzt man (wie in Antwort auf Frage 90) für:

$$a^n + b^n = 2\cos n\varphi$$
$$a^{n-2} + b^{n-2} = 2\cdot\cos(n-2)\varphi \text{ u. s. w.}$$

ferner für:

$$i^n = i^{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

und für das mittelste Glied:

$$\pm 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 200)}$$

so erhält man

bei geradem n:

$$2^n\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin^n\varphi = 2\cos n\varphi - 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$-\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots \pm 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch 2, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\sin^n\varphi = \cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi$$
$$-\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots \pm \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}$$

oder:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-4)\varphi\right.$$
$$\left.-\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\cos(n-6)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+2}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\frac{n}{2}}\right]$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied b^n der in gerader Anzahl vorkommenden Glieder negativ, das vorletzte positiv u. s. w., und man erhält demnach in obiger Gleichung als erstes Glied der rechten Seite:

$$(a^n - b^n)$$

als zweites Glied:

$$-n\cdot(a^{n-2} - b^{n-2})$$

denn:

$$-n\cdot a^{n-2}\cdot ab + n\cdot b^{n-2}\cdot ab = -n\cdot(a^{n-2} - b^{n-2})ab \text{ u. s. w.}$$

Da nun:

$$a^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

und

$$b^n = \cos n\varphi - i\sin n\varphi$$

ist, so gibt:

$$a^n - b^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi - \cos n\varphi + i \sin n\varphi = 2i \sin n\varphi$$

ebenso:

$$a^{n-2} - b^{n-2} = 2i \sin (n-2)\varphi \quad \text{u. s. w.}$$

Demnach erhält man, da die beiden Mittelglieder der Binominalreihe vereinigt:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot(a-b)\cdot a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 201)}$$

oder, weil:

$$a - b = 2i \sin \varphi$$

und

$$a^{\frac{n-1}{2}}\cdot b^{\frac{n-1}{2}} = +1$$

ist:

$$\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot i\cdot\sin\varphi$$

ergeben,

bei ungeradem n:

$$2^n\cdot i^n\cdot\sin^n\varphi = 2i\sin n\varphi - 2n\cdot i\sin(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot i\cdot\sin(n-4)\varphi$$

$$-\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot i\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots \pm \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot i\sin\varphi$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch $2i$, so ergibt sich:

$$2^{n-1}\cdot i^{n-1}\cdot\sin^n\varphi = \sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\sin(n-4)\varphi$$

$$-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi$$

oder, weil:

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot2}\cdot\sin(n-4)\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\sin(n-6)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\sin\varphi\right]$$

Anmerkung 12. Da die in den Antworten auf die Fragen 90 und 91 abgeleiteten vier Formeln für die Integralrechnung von Wichtigkeit sind, so kann dem Studierenden nicht genug empfohlen werden, sich diese Formeln, ihre Ableitung und Anwendung gründlich einzuüben.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 75. Es ist:

a) $\cos^5\varphi$

b) $\cos^6\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Auflösung.

a) In $\cos^5\varphi$ ist der Exponent eine ungerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\cdot\cos\varphi\right]$$

in welche man für $n = 5$ einzusetzen hat. Man erhält alsdann:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{2^4}\cdot\left(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cos\varphi)$$

b) In $\cos^6\varphi$ ist der Exponent eine gerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots}\right)$$

in welche man für $n = 6$ einzusetzen hat. Dann ergibt sich:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{2^5}\cdot\left(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + 15\cdot\cos 2\varphi + 10)$$

Aufgabe 76. Was erhält man mittelst der in Aufgabe 75 abgeleiteten Formeln für:

a) $\cos^5 60^0$?

b) $\cos^6 60^0$?

Auflösung.

a) Nach voriger Auflösung ist:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cdot\cos\varphi)$$

Demnach gibt:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(\cos 300^0 + 5\cdot\cos 180^0 + 10\cdot\cos 60^0)$$

oder, weil:

$$\cos 300^0 = \cos 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$

$$\cos 180^0 = -1$$

und

$$\cos 60^0 = 0{,}5$$

ist:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(0{,}5 - 5 + 5) = \frac{1}{16}\cdot 0{,}5 = 0{,}03125$$

(vergl. Erkl. 203)

Erkl. 203. Da $\cos 60^0 = 0{,}5$ ist, so gibt:

$$\cos^5 60^0 = 0{,}5^5$$

d. i.:

$$= 0{,}03125$$

und

$$\cos^6 60^0 = 0{,}5^6$$

d. i.:

$$= 0{,}015625$$

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 75, b) ist:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10)$$

Demnach erhält man für:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(\cos 360^0 + 6\cos 240^0 + 15\cos 120^0 + 10)$$

oder, weil:

$$\cos 360^0 = 1$$
$$\cos 240^0 = +\cos 60^0 = 0{,}5$$
$$\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -0{,}5$$

ist:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(1+3-7{,}5+10) = \frac{1}{32}\cdot 0{,}5 = 0{,}015625 \quad \text{(vergl. Erkl. 203)}$$

Aufgabe 77. Es ist:

a) $\sin^3\varphi$

b) $\sin^4\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Auflösung.

a) In $\sin^3\varphi$ ist der Exponent ungerade, folglich ist hier die Formel:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \cdots]$$

anzuwenden. Man erhält, wenn man in diese Gleichung für $n = 3$ einsetzt:

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{2^2\cdot(-1)^1}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

b) Die Berechnung von $\sin^4\varphi$ hat, weil der Exponent eine gerade Zahl ist, nach der Formel:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\right]$$

zu erfolgen. Setzt man in dieselbe für $n = 4$ ein, so ergibt sich:

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{2^3\cdot(-1)^2}\cdot\left(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\right) = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

Aufgabe 78. Was erhält man mittelst der in Aufgabe 77 abgeleiteten Formeln für:

a) $\sin^3 50^0$?

b) $\sin^4 50^0$?

Erkl. 204. Da $\sin 50^0 = 0{,}76604$ ist, gibt:

$$\sin^3 50^0 = 0{,}76604^3 = 0{,}44953$$

und

$$\sin^4 50^0 = 0{,}76604^4 = 0{,}34436$$

Auflösung.

a) Da nach der Auflösung voriger Aufgabe:

$$\sin^3\varphi = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

ist, so erhält man für:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 150^0 - 3\sin 50^0)$$

Nun ist:

$$\sin 150^0 = +\sin 30^0 = 0{,}5$$

und

$$\sin 50^0 = 0{,}76604$$

folglich gibt:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(0{,}5 - 3\cdot 0{,}76604) = -\frac{1}{4}\cdot(-1{,}79812) = +0{,}44953$$

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 77, b) gibt:

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Folglich erhält man für:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(\cos 200^0 - 4\cos 100^0 - 3)$$

Nun ist:

$$\cos 200^0 = -\cos 20^0 = -0{,}93969$$
$$\cos 100^0 = -\cos 80^0 = -0{,}17365$$

folglich gibt:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(-0{,}93969 + 4\cdot 0{,}17365 + 3) = \frac{1}{8}\cdot 2{,}75491 = 0{,}344364$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 79. Es ist:

a) $\cos^3\varphi$
b) $\cos^4\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ,

c) $\sin^5\varphi$
d) $\sin^6\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 75 und 77.

Aufgabe 80. Mittelst der sich aus der Auflösung der Aufgabe 79 ergebenden Formeln sind zu berechnen:

a) $\cos^3 40^0$
b) $\cos^4 40^0$
c) $\sin^5 20^0$
d) $\sin^6 20^0$

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 76 und 78. Zur Probe sind die nebenstehenden Funktionen auch ohne die Formeln aus den Fragen 90 und 91 zu berechnen.

---

b) Ueber die Darstellung des Sinus und Cosinus vom Vielfachen eines Winkels durch Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Winkel.

Frage 92. Wie lässt sich:

$$\cos n\varphi$$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 90 ist:

$$2\cos n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79), so erhält man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$2\cos n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\varphi + \cos^n\varphi - n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi - \cdots \pm i^n\cdot\sin^n\varphi$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg