Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

# Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

## α) Gelöste Aufgaben.

**Aufgabe 75.** Es ist:

a) $\cos^5\varphi$

b) $\cos^6\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels $\varphi$ auszudrücken.

**Auflösung.**

a) In $\cos^5\varphi$ ist der Exponent eine ungerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\cdot\cos\varphi\right]$$

in welche man für $n = 5$ einzusetzen hat. Man erhält alsdann:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{2^4}\cdot\left(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cos\varphi)$$

b) In $\cos^6\varphi$ ist der Exponent eine gerade Zahl, demnach erfolgt die Berechnung nach der Formel:

$$\cos^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left(\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\cdots}\right)$$

in welche man für $n = 6$ einzusetzen hat. Dann ergibt sich:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{2^5}\cdot\left(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cdot\cos 4\varphi + 15\cdot\cos 2\varphi + 10)$$

**Aufgabe 76.** Was erhält man mittelst der in Aufgabe 75 abgeleiteten Formeln für:

a) $\cos^5 60^0$?

b) $\cos^6 60^0$?

**Auflösung.**

a) Nach voriger Auflösung ist:

$$\cos^5\varphi = \frac{1}{16}\cdot(\cos 5\varphi + 5\cdot\cos 3\varphi + 10\cdot\cos\varphi)$$

Demnach gibt:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(\cos 300^0 + 5\cdot\cos 180^0 + 10\cdot\cos 60^0)$$

oder, weil:

$$\cos 300^0 = \cos 60^0 \quad \text{(nach Erkl. 101)}$$

$$\cos 180^0 = -1$$

und

$$\cos 60^0 = 0{,}5$$

ist:

$$\cos^5 60^0 = \frac{1}{16}\cdot(0{,}5 - 5 + 5) = \frac{1}{16}\cdot 0{,}5 = 0{,}03125$$

(vergl. Erkl. 203)

**Erkl. 203.** Da $\cos 60^0 = 0{,}5$ ist, so gibt:

$$\cos^5 60^0 = 0{,}5^5$$

d. i.:

$$= 0{,}03125$$

und

$$\cos^6 60^0 = 0{,}5^6$$

d. i.:

$$= 0{,}015625$$

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 75, b) ist:

$$\cos^6\varphi = \frac{1}{32}\cdot(\cos 6\varphi + 6\cos 4\varphi + 15\cos 2\varphi + 10)$$

Demnach erhält man für:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(\cos 360^0 + 6\cos 240^0 + 15\cos 120^0 + 10)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder, weil:

$$\cos 360^0 = 1$$
$$\cos 240^0 = +\cos 60^0 = 0{,}5$$
$$\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -0{,}5$$

ist:

$$\cos^6 60^0 = \frac{1}{32}\cdot(1+3-7{,}5+10) = \frac{1}{32}\cdot 0{,}5 = 0{,}015625 \quad \text{(vergl. Erkl. 203)}$$

**Aufgabe 77.** Es ist:

a) $\sin^3\varphi$

b) $\sin^4\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels $\varphi$ auszudrücken.

**Auflösung.**

a) In $\sin^3\varphi$ ist der Exponent ungerade, folglich ist hier die Formel:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \cdots]$$

anzuwenden. Man erhält, wenn man in diese Gleichung für $n = 3$ einsetzt:

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{2^2\cdot(-1)^1}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi) = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

b) Die Berechnung von $\sin^4\varphi$ hat, weil der Exponent eine gerade Zahl ist, nach der Formel:

$$\sin^n\varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \cdots + \frac{1}{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdots}{1\cdot 2\cdots\cdots}\right]$$

zu erfolgen. Setzt man in dieselbe für $n = 4$ ein, so ergibt sich:

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{2^3\cdot(-1)^2}\cdot\left(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\right) = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

**Aufgabe 78.** Was erhält man mittelst der in Aufgabe 77 abgeleiteten Formeln für:

a) $\sin^3 50^0$?

b) $\sin^4 50^0$?

**Erkl. 204.** Da $\sin 50^0 = 0{,}76604$ ist, gibt:

$$\sin^3 50^0 = 0{,}76604^3 = 0{,}44953$$

und

$$\sin^4 50^0 = 0{,}76604^4 = 0{,}34436$$

**Auflösung.**

a) Da nach der Auflösung voriger Aufgabe:

$$\sin^3\varphi = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 3\varphi - 3\sin\varphi)$$

ist, so erhält man für:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(\sin 150^0 - 3\sin 50^0)$$

Nun ist:

$$\sin 150^0 = +\sin 30^0 = 0{,}5$$

und

$$\sin 50^0 = 0{,}76604$$

folglich gibt:

$$\sin^3 50^0 = -\frac{1}{4}\cdot(0{,}5 - 3\cdot 0{,}76604) = -\frac{1}{4}\cdot(-1{,}79812) = +0{,}44953$$

b) Nach der Auflösung von Aufgabe 77, b) gibt:

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}\cdot(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Folglich erhält man für:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(\cos 200^0 - 4\cos 100^0 - 3)$$

Nun ist:

$$\cos 200^0 = -\cos 20^0 = -0{,}93969$$
$$\cos 100^0 = -\cos 80^0 = -0{,}17365$$

folglich gibt:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(-0{,}93969 + 4\cdot 0{,}17365 + 3) = \frac{1}{8}\cdot 2{,}75491 = 0{,}344364$$

---

### β) Ungelöste Aufgaben.

**Aufgabe 79.** Es ist:

a) $\cos^3\varphi$
b) $\cos^4\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels $\varphi$,

c) $\sin^5\varphi$
d) $\sin^6\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels $\varphi$ auszudrücken.

**Andeutung.** Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 75 und 77.

---

**Aufgabe 80.** Mittelst der sich aus der Auflösung der Aufgabe 79 ergebenden Formeln sind zu berechnen:

a) $\cos^3 40^0$
b) $\cos^4 40^0$
c) $\sin^5 20^0$
d) $\sin^6 20^0$

**Andeutung.** Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 76 und 78. Zur Probe sind die nebenstehenden Funktionen auch ohne die Formeln aus den Fragen 90 und 91 zu berechnen.

---

## b) Ueber die Darstellung des Sinus und Cosinus vom Vielfachen eines Winkels durch Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Winkel.

**Frage 92.** Wie lässt sich:

$$\cos n\varphi$$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken?

**Antwort.** Nach der Antwort auf Frage 90 ist:

$$2\cos n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79), so erhält man, wenn $n$ eine ganze Zahl ist:

$$2\cos n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\varphi + \cos^n\varphi - n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi - \cdots \pm i^n\cdot\sin^n\varphi$$



BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg