Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

b) Ueber die Darstellung des Sinus und Cosinus vom Vielfachen eines Winkels durch Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Winkel

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

Folglich erhält man für:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(\cos 200^0 - 4\cos 100^0 - 3)$$

Nun ist:

$$\cos 200^0 = -\cos 20^0 = -0{,}93969$$
$$\cos 100^0 = -\cos 80^0 = -0{,}17365$$

folglich gibt:

$$\sin^4 50^0 = \frac{1}{8}\cdot(-0{,}93969 + 4\cdot 0{,}17365 + 3) = \frac{1}{8}\cdot 2{,}75491 = 0{,}344364$$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 79. Es ist:

a) $\cos^3\varphi$
b) $\cos^4\varphi$

durch den Cosinus vom Vielfachen des Winkels φ,

c) $\sin^5\varphi$
d) $\sin^6\varphi$

durch den Sinus vom Vielfachen des Winkels φ auszudrücken.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 75 und 77.

Aufgabe 80. Mittelst der sich aus der Auflösung der Aufgabe 79 ergebenden Formeln sind zu berechnen:

a) $\cos^3 40^0$
b) $\cos^4 40^0$
c) $\sin^5 20^0$
d) $\sin^6 20^0$

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 76 und 78. Zur Probe sind die nebenstehenden Funktionen auch ohne die Formeln aus den Fragen 90 und 91 zu berechnen.

---

b) Ueber die Darstellung des Sinus und Cosinus vom Vielfachen eines Winkels durch Potenzen des Sinus und Cosinus vom einfachen Winkel.

Frage 92. Wie lässt sich:

$$\cos n\varphi$$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ausdrücken?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 90 ist:

$$2\cos n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes (siehe Erkl. 79), so erhält man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$2\cos n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi + \cdots$$
$$+ i^n\cdot\sin^n\varphi + \cos^n\varphi - n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$- \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi - \cdots \pm i^n\cdot\sin^n\varphi$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

oder vereinigt:

$$2\cos n\varphi = 2\cos^n\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$+2\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi+\cdots$$

oder, weil $i^2=-1$, $i^4=+1\cdots$ ist und sich aus sämtlichen Gliedern der Faktor 2 fortheben lässt:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi$$
$$-\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\cos^{n-6}\varphi\cdot\sin^6\varphi+\cdots$$

Frage 93. Wie lässt sich:

$$\sin n\varphi$$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ausdrücken?

Antwort. Nach der Antwort auf Frage 91 ist:

$$2i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n$$

Entwickelt man die rechte Seite dieser Gleichung nach der Formel des binomischen Lehrsatzes, so erhält man, wenn n eine ganze Zahl ist:

$$2i\sin n\varphi = \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot$$
$$\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi+\cdots$$
$$+i^n\cdot\sin^n\varphi - \cos^n\varphi + n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot$$
$$\cos^{n-4}\varphi\cdot i^4\cdot\sin^4\varphi+\cdots\mp i^n\cdot\sin^n\varphi$$

oder vereinigt:

$$2i\sin n\varphi = 2n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi$$
$$+\frac{2\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot i^5\cdot\sin^5\varphi+\cdots$$

oder, da sich aus sämtlichen Gliedern der Gleichung der Faktor 2 fortheben lässt und $i^3=-i$, $i^5=+i$, $i^7=-i$ u. s. w. ist:

$$i\sin n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot i\cdot\sin^3\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot i\cdot\sin^5\varphi-\cdots$$

oder endlich, indem man die ganze Gleichung durch i dividiert:

$$\sin n\varphi = n\cdot\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi$$
$$+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi-\cdots$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 81. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\sin 6\varphi$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in die letzte Gleichung der Antwort auf Frage 93 für $n = 5$ ein, so ergibt sich:

$$\text{a)}\quad \sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ ist (siehe Erkl. 22).

$$\text{b)}\quad \sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

Aufgabe 82. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\cos 6\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln zu berechnen für $\varphi = 25^0$.

Auflösung.

a) Da:

$$\sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

ist, so gibt:

$$\sin 5\cdot25^0 \text{ oder } \sin 125^0 = 5\cdot\cos^4 25^0\cdot\sin 25^0 - 10\cdot\cos^2 25^0\cdot\sin^3 25^0 + \sin^5 25^0$$

oder:

$$= 5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262 - 10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3 + 0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 206):

$$\sin 125^0 = 0{,}81923$$

---

b) Da:

$$\sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

ist, so erhält man für:

$$\sin 6\cdot25^0 \text{ oder } \sin 150^0 = 6\cdot\cos^5 25^0\cdot\sin 25^0 - 20\cdot\cos^3 25\cdot\sin^3 25^0 + 6\cdot\cos 25^0\cdot\sin^5 25^0$$

oder:

$$= 6\cdot0{,}90631^5\cdot0{,}42262 - 20\cdot0{,}90631^3\cdot0{,}42262^3 + 6\cdot0{,}90631\cdot0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 207):

$$\sin 150^0 = 0{,}5$$

Erkl. 205. Es ist:

$$\sin 125^0 = \sin(180^0 - 125^0) = \sin 55^0 = 0{,}81915$$

und

$$\sin 150^0 = \sin 30^0 = 0{,}5$$

Erkl. 206.

$$\log(5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262) = \log 5 + 4\cdot\log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$$

$$\left.\begin{array}{r} \log 5 = 0{,}69897 \\ 4\log 0{,}90631 = 0{,}82912 - 1 \\ \log 0{,}42262 = 0{,}62595 - 1 \end{array}\right\} \log 0{,}90631 = 0{,}95728 - 1$$

$$2{,}15404 - 2 \text{ oder } = 0{,}15404$$

$$\text{numlog } 0{,}15404 = 1{,}42574$$

$$\log(10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3) = \log 10 + 2\cdot\log 0{,}90631 + 3\cdot\log 0{,}42262$$

$$\begin{array}{r} \log 10 = 1{,}00000 \\ 2\log 0{,}90631 = 0{,}91456 - 1 \\ 3\log 0{,}42262 = 0{,}87785 - 2 \\ \hline 2{,}79241 - 3 \text{ oder } = 0{,}79241 - 1 \end{array}$$

$$\text{numlog } 0{,}79241 - 1 = 0{,}62003$$

$$\log(0{,}42262)^5 = 5\cdot\log 0{,}42262 = 0{,}12975 - 2$$

$$\text{numlog } 0{,}12975 - 2 = 0{,}01348$$

Demnach gibt:

$$\sin 125^0 = (1{,}42574 + 0{,}01348) - 0{,}62003 = 0{,}81919$$

Erkl. 206a. Die vorstehende logarithmische Berechnung von Produkten und Potenzen beruht auf folgenden Sätzen der Logarithmenrechnung:

„Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren."

„Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl, multipliziert mit dem Exponenten."

Erkl. 207.

$$\log(6\cdot 0{,}90631^5\cdot 0{,}42262) = \log 6 + 5\log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0{,}77815\\
5\log 0{,}90631 &= 4{,}78640 - 5\\
\log 0{,}42262 &= 0{,}62595 - 1\\
\hline
&\ 6{,}19050 - 6 \text{ oder } = 0{,}19050\\
\text{numlog } 0{,}19050 &= 1{,}55063
\end{aligned}$$

$$\log(20\cdot 0{,}90631^3\cdot 0{,}42262^3) = \log 20 + 3\log 0{,}90631 + 3\log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 20 &= 1{,}30103\\
3\log 0{,}90631 &= 2{,}87184 - 3\\
3\log 0{,}42262 &= 1{,}87785 - 3\\
\hline
&\ 6{,}05072 - 6 \text{ oder } = 0{,}05072\\
\text{numlog } 0{,}05072 &= 1{,}12387
\end{aligned}$$

$$\log(6\cdot 0{,}90631\cdot 0{,}42262^5) = \log 6 + \log 0{,}90631 + 5\log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0{,}77815\\
\log 0{,}90631 &= 0{,}95728 - 1\\
5\log 0{,}42262 &= 3{,}12975 - 5\\
\hline
&\ 4{,}86518 - 6 \text{ oder } = 0{,}86518 - 2\\
\text{numlog } 0{,}86518 - 2 &= 0{,}07331
\end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\sin 150^0 = (1{,}55063 - 1{,}12387) + 0{,}07331 = 0{,}5$$

Aufgabe 83. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 92 ist:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \cdots$$

Demnach erhält man:

a) für $n = 3$:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

b) für $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\cos 4\varphi &= \cos^4\varphi - \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^4\varphi\\
&= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi
\end{aligned}$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ (nach Erkl. 22) ist.

Aufgabe 84. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln für $\varphi = 15^0$ zu berechnen.

Erkl. 208. Es ist:

$$\cos 45^0 = 0{,}70711$$

und $\cos 60^0 = 0{,}5$

Auflösung.

a) Da:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

ist, so erhält man für:

$$\cos 3\cdot 15^0 \text{ oder } \cos 45^0 = \cos^3 15^0 - 3\cdot\cos 15^0\cdot\sin^2 15^0$$

oder: $= 0{,}96593^3 - 3\cdot 0{,}96593\cdot 0{,}25882^2$

oder: $= 0{,}70715$ (siehe Erkl. 209)

Erkl. 209.

$\log 0{,}96593^3 = 3 \cdot \log 0{,}96593 = 2{,}95485 - 3$

oder: $= 0{,}95485 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}95485 - 1 = 0{,}90126$

$\log (3 \cdot 0{,}96593 \cdot 0{,}25882^2) =$

$\log 3 + \log 0{,}96593 + 2 \log 0{,}25882$

$\log 3 = 0{,}47712$

$\log 0{,}96593 = 0{,}98495 - 1$

$2 \log 0{,}25882 = 0{,}82598 - 2$

$2{,}28805 - 3$ oder $= 0{,}28805 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}28805 - 1 = 0{,}19411$

folglich ist:

$\cos 45^0 = 0{,}90126 - 0{,}19411 = 0{,}70715$

b) Da:

$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6 \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi + \sin^4\varphi$

so gibt:

$\cos 4 \cdot 15^0$ oder $\cos 60^0 =$

$0{,}96593^4 - 6 \cdot 0{,}96592^2 \cdot 0{,}25882^2 + 0{,}25882^4$

oder (nach Erkl. 208 bezw. 210):

$\cos 60^0 = 0{,}5$

Erkl. 210.

$\log 0{,}96593^4 = 4 \log 0{,}96593 = 4 \cdot (0{,}98495 - 1) = 0{,}93980 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}93980 - 1 = 0{,}87056$

$\log (6 \cdot 0{,}96593^2 \cdot 0{,}25882^2) = \log 6 + 2 \cdot \log 0{,}96593 + 2 \log 0{,}25882$

$\log 6 = 0{,}77815$

$2 \log 0{,}96593 = 1{,}96990 - 2$

$2 \log 0{,}25882 = 0{,}82598 - 2$

$3{,}57403 - 4$ oder $= 0{,}57403 - 1$

$\text{numlog}\, 0{,}57403 - 1 = 0{,}3750$

$\log 0{,}25882^4 = 4 \cdot \log 0{,}25882 = 1{,}65196 - 4 = 0{,}65196 - 3$

$\text{numlog}\, 0{,}65196 - 3 = 0{,}004487$

Demnach gibt:

$\cos 60^0 = (0{,}87056 + 0{,}004487) - 0{,}3750 = 0{,}5$

β) Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 85. Es ist:

a) $\sin 3\varphi$

b) $\sin 4\varphi$

c) $\cos 5\varphi$

d) $\cos 6\varphi$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auszudrücken.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 81 und 83.

Aufgabe 86. Es ist:

a) $\sin 3\varphi$

b) $\sin 4\varphi$

für $\varphi = 20^0$,

c) $\cos 5\varphi$

d) $\cos 6\varphi$

für $\varphi = 55^0$

nach den sich aus der Auflösung der Aufgabe 85 ergebenden Formeln zu berechnen.

Andeutung. Auflösung analog den Auflösungen der Aufgaben 82 und 84.