Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

a) Gelöste Aufgaben

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

α) Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 81. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\sin 6\varphi$

durch Potenzen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Setzt man in die letzte Gleichung der Antwort auf Frage 93 für $n = 5$ ein, so ergibt sich:

$$\text{a)}\quad \sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ ist (siehe Erkl. 22).

$$\text{b)}\quad \sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - \frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

oder:

$$= 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

Aufgabe 82. Es ist:

a) $\sin 5\varphi$

b) $\cos 6\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln zu berechnen für $\varphi = 25^0$.

Auflösung.

a) Da:

$$\sin 5\varphi = 5\cdot\cos^4\varphi\cdot\sin\varphi - 10\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$$

ist, so gibt:

$$\sin 5\cdot25^0 \text{ oder } \sin 125^0 = 5\cdot\cos^4 25^0\cdot\sin 25^0 - 10\cdot\cos^2 25^0\cdot\sin^3 25^0 + \sin^5 25^0$$

oder:

$$= 5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262 - 10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3 + 0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 206):

$$\sin 125^0 = 0{,}81923$$

---

b) Da:

$$\sin 6\varphi = 6\cdot\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi - 20\cdot\cos^3\varphi\cdot\sin^3\varphi + 6\cdot\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi$$

ist, so erhält man für:

$$\sin 6\cdot25^0 \text{ oder } \sin 150^0 = 6\cdot\cos^5 25^0\cdot\sin 25^0 - 20\cdot\cos^3 25\cdot\sin^3 25^0 + 6\cdot\cos 25^0\cdot\sin^5 25^0$$

oder:

$$= 6\cdot0{,}90631^5\cdot0{,}42262 - 20\cdot0{,}90631^3\cdot0{,}42262^3 + 6\cdot0{,}90631\cdot0{,}42262^5$$

oder (nach Erkl. 207):

$$\sin 150^0 = 0{,}5$$

Erkl. 205. Es ist:

$$\sin 125^0 = \sin(180^0 - 125^0) = \sin 55^0 = 0{,}81915$$

und

$$\sin 150^0 = \sin 30^0 = 0{,}5$$

Erkl. 206.

$$\log(5\cdot0{,}90631^4\cdot0{,}42262) = \log 5 + 4\cdot\log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$$

$$\left.\begin{array}{r} \log 5 = 0{,}69897 \\ 4\log 0{,}90631 = 0{,}82912 - 1 \\ \log 0{,}42262 = 0{,}62595 - 1 \end{array}\right\} \log 0{,}90631 = 0{,}95728 - 1$$

$$2{,}15404 - 2 \text{ oder } = 0{,}15404$$

$$\text{numlog } 0{,}15404 = 1{,}42574$$

$$\log(10\cdot0{,}90631^2\cdot0{,}42262^3) = \log 10 + 2\cdot\log 0{,}90631 + 3\cdot\log 0{,}42262$$

$$\begin{array}{r} \log 10 = 1{,}00000 \\ 2\log 0{,}90631 = 0{,}91456 - 1 \\ 3\log 0{,}42262 = 0{,}87785 - 2 \\ \hline 2{,}79241 - 3 \text{ oder } = 0{,}79241 - 1 \end{array}$$

$$\text{numlog } 0{,}79241 - 1 = 0{,}62003$$

$$\log(0{,}42262)^5 = 5\cdot\log 0{,}42262 = 0{,}12975 - 2$$

$$\text{numlog } 0{,}12975 - 2 = 0{,}01348$$

Demnach gibt:

$$\sin 125^0 = (1{,}42574 + 0{,}01348) - 0{,}62003 = 0{,}81919$$

Erkl. 206a. Die vorstehende logarithmische Berechnung von Produkten und Potenzen beruht auf folgenden Sätzen der Logarithmenrechnung:

„Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren."

„Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Grundzahl, multipliziert mit dem Exponenten."

Erkl. 207.

$$\log(6\cdot 0{,}90631^5\cdot 0{,}42262) = \log 6 + 5\log 0{,}90631 + \log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0{,}77815\\
5\log 0{,}90631 &= 4{,}78640 - 5\\
\log 0{,}42262 &= 0{,}62595 - 1\\
\hline
&\ 6{,}19050 - 6 \text{ oder } = 0{,}19050\\
\text{numlog } 0{,}19050 &= 1{,}55063
\end{aligned}$$

$$\log(20\cdot 0{,}90631^3\cdot 0{,}42262^3) = \log 20 + 3\log 0{,}90631 + 3\log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 20 &= 1{,}30103\\
3\log 0{,}90631 &= 2{,}87184 - 3\\
3\log 0{,}42262 &= 1{,}87785 - 3\\
\hline
&\ 6{,}05072 - 6 \text{ oder } = 0{,}05072\\
\text{numlog } 0{,}05072 &= 1{,}12387
\end{aligned}$$

$$\log(6\cdot 0{,}90631\cdot 0{,}42262^5) = \log 6 + \log 0{,}90631 + 5\log 0{,}42262$$

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0{,}77815\\
\log 0{,}90631 &= 0{,}95728 - 1\\
5\log 0{,}42262 &= 3{,}12975 - 5\\
\hline
&\ 4{,}86518 - 6 \text{ oder } = 0{,}86518 - 2\\
\text{numlog } 0{,}86518 - 2 &= 0{,}07331
\end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\sin 150^0 = (1{,}55063 - 1{,}12387) + 0{,}07331 = 0{,}5$$

Aufgabe 83. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

durch Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ auszudrücken.

Auflösung. Nach der Antwort auf Frage 92 ist:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - \cdots$$

Demnach erhält man:

a) für $n = 3$:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}\cdot\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

b) für $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\cos 4\varphi &= \cos^4\varphi - \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\cos^0\varphi\cdot\sin^4\varphi\\
&= \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi + \sin^4\varphi
\end{aligned}$$

weil $\cos^0\varphi = 1$ (nach Erkl. 22) ist.

Aufgabe 84. Es ist:

a) $\cos 3\varphi$

b) $\cos 4\varphi$

nach den in der Auflösung voriger Aufgabe entwickelten Formeln für $\varphi = 15^0$ zu berechnen.

Erkl. 208. Es ist:

$$\cos 45^0 = 0{,}70711$$

und $\cos 60^0 = 0{,}5$

Auflösung.

a) Da:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

ist, so erhält man für:

$$\cos 3\cdot 15^0 \text{ oder } \cos 45^0 = \cos^3 15^0 - 3\cdot\cos 15^0\cdot\sin^2 15^0$$

oder: $= 0{,}96593^3 - 3\cdot 0{,}96593\cdot 0{,}25882^2$

oder: $= 0{,}70715$ (siehe Erkl. 209)