Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen

Krüger, Richard

Stuttgart, 1891

F. Ueber die Exponentialreihe und einige Anwendungen derselben auf die vorliegenden Probleme

urn:nbn:de:bsz:31-101180

Visual Library

F. Ueber die Exponentialreihe und einige Anwendungen derselben auf die vorliegenden Probleme.

Anmerkung 13. Vorausgesetzt werden Kenntnisse vom binomischen Lehrsatze, von der Logarithmenrechnung und der Goniometrie.

a) Ueber die Exponentialreihe im allgemeinen.

Frage 94. Was versteht man unter der Exponentialreihe? Wie wird dieselbe entwickelt?

Antwort. Nach dem binomischen Lehrsatze (siehe Erkl. 79) gibt:

$$(a+b)^n = a^n + n\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^{n-3}\cdot b^3 + \cdots$$

Setzt man in diese Gleichung 1 statt a und $\frac{x}{n}$ statt b, worin x irgend eine ganze oder gebrochene, reelle Zahl bedeute, so erhält man:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{x}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{x^3}{n^3} + \cdots$$

oder, da:

$$\frac{n\cdot(n-1)}{n^2} = \frac{n^2-n}{n^2} = 1-\frac{1}{n}$$

und

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} = \frac{n^3-3n^2+2n}{n^3} = 1-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots$$

gibt:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

Ist die Anzahl der Glieder der vorstehenden Reihe unendlich gross, ist also $n=\infty$, so ist:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{2}{n} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

und man erhält:

$$1-\frac{1}{n} = 1-0 = 1$$

$$1-\frac{2}{n} = 1-0 = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

oder für:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Wird 1 statt x gesetzt, so ergibt sich:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

Berechnet man die rechte Seite dieser Gleichung, so erhält man einen unendlichen Dezimalbruch, dessen erste 6 Ziffern:

2,71828

Erkl. 211. Mittelst der für e^x entwickelten unendlichen Reihe können beliebige Potenzen oder Wurzeln von $e = 2{,}71828\cdots$ berechnet werden, weil x jede beliebige, positive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl sein kann.

Diese Reihe führt den Namen „Exponentialreihe“.

sind. Dieser Dezimalbruch wird in der mathematischen Wissenschaft mit e bezeichnet. Es ist also:

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

und

$$e^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

ferner:

$$e^{-x} = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-x+\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots \text{ (bis ins Unendliche)}$$

(siehe Erkl. 211)

Frage 95. Was erhält man für:

e^{ix} und e^{-ix}?

Erkl. 212. Ist $x = 0$, so ergibt sich:

$$\cos 0^0 = 1-\frac{0}{1\cdot 2}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = 1$$

$$\sin 0^0 = 0-\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = 0$$

Setzt man für $x = -x$, so folgt:

$$\cos(-x) = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots = \cos x$$

$$\sin(-x) = -x+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$$

$$= -\sin x \text{ (vergl. Erkl. 141)}$$

Ferner gibt:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1 \text{ (nach Erkl. 24)}$$

und

$$(\cos x + i\sin x)\cdot(\cos x - i\sin x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

Da:

$$e^{ix}\cdot e^{-ix} = \cos^2 x + \sin^2 x$$

ist, so muss:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

sein, was (nach Erkl. 130) richtig ist.

Erkl. 213. Die Gleichungen:

$$1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots = \cos x$$

und

$$x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots = \sin x$$

sind zuerst von Newton (geb. 1643, gest. 1727) entwickelt worden. Euler (geb. 1707, gest. 1783) hat diese aus den Werten von $\cos xy$ und $\sin xy$ abgeleitet.

(Siehe Baltzer, Elemente der Mathematik I, Seite 183, Anm.)

Antwort. Da nach vorstehender Antwort:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

ist, so gibt:

$$e^{ix} = 1+ix+\frac{i^2x^2}{1\cdot 2}+\frac{i^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{i^4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$$

oder, weil:

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$i^4 = 1 \text{ u. s. w.}$$

ist (siehe Antwort auf Frage 5):

$$e^{ix} = 1+ix-\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{ix^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots$$

oder:

$$= \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)$$
$$+ i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Ebenso erhält man für:

$$e^{-ix} = \left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right)$$
$$- i\cdot\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right)$$

Nun kann man für:

$$\left(1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots\right) = \cos x$$

und für:

$$\left(x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\right) = \sin x$$

setzen, weil diese beiden Klammerausdrücke sämtliche Eigenschaften von $\cos x$ bezw. $\sin x$ besitzen, was immer auch für x eingesetzt werden möge (siehe Erkl. 212).

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Demnach ist:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

und

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x \quad \text{(vgl. Erkl. 214)}$$

Setzt man für $x = 2k\pi$ ein, so erhält man:

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

oder, weil:

$$\cos 2k\pi = 1$$

und

$$\sin 2k\pi = 0$$

ist, wenn k eine positive Ganzzahl (einschliesslich 0) bedeutet (siehe Erkl. 162 und Antwort auf Frage 82):

$$e^{2k\pi i} = 1$$

Ist $x = (2k+1)\pi$, so ergibt sich:

$$e^{(2k+1)\pi} = \cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi$$

oder, weil:

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

und

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

ist (nach Antwort auf Frage 82):

$$e^{(2k+1)\pi} = -1$$

Erkl. 214. In e^{ix} bedeutet x einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen und durch Teile desselben dargestellten Kreisbogen, während x in $\cos x + i \sin x$ den Winkel bedeutet, welcher zu jenem Bogen gehört.

Erkl. 215. Aus der Exponentialreihe lässt sich ein neuer Beweis des Moivreschen Satzes (siehe Erkl. 156) herleiten.

Da:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ist, so ist auch:

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

oder allgemein:

$$\ldots \quad e^{nix} = \cos nx + i \sin nx$$

---

b) Ueber die Berechnung von i^i.

Frage 96. Was erhält man für:

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}?$$

Antwort. Setzt man in die Gleichung:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$\frac{\pi}{2}$ statt x ein, so erhält man:

$$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = \cos 90^0 + i \sin 90^0 = 0 + i = +i$$

Demnach ist:

$$e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)^i} = i^i$$

Nun gibt:

$$\left(\frac{i\pi}{2}\right) \cdot i = \frac{i^2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

folglich ist:

$$i^i \text{ oder } \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ oder } = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} \quad \text{(nach Erkl. 24)}$$

(vergl. Erkl. 216)

Erkl. 216. Die Lösung des Problems i^i stammt von Euler.

---

c) Ueber die Darstellung von $l(a+bi)$.

Frage 97. Wie lässt sich:

$$l(a+bi)$$

bilden?

Antwort. Da:

$$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

(nach Antwort auf Frage 95)

Erkl. 217. Die auf die Basis $e = 2{,}71828\cdots$ bezogenen Logarithmen heissen natürliche oder nach ihrem Erfinder Napier (1614) die Napierschen; alle Logarithmen, welche eine andere Basis besitzen (z. B. die Basis 10), nennt man künstliche. Die natürlichen Logarithmen bezeichnet man mit log nat (logarithmus naturalis, d. h. natürlicher Logarithmus) oder kurz mit l. Die auf die Basis 10 bezogenen Logarithmen heissen gemeine oder nach ihrem Erfinder Briggs (geb. 1556, gest. 1630) die Briggschen Logarithmen. Man bezeichnet sie einfach mit log (siehe die Erkl. 206, 207. 209 und 210). Die natürlichen Logarithmen werden hauptsächlich in der höheren, die gemeinen in der niederen Mathematik benutzt.

Erkl. 218. Ein Satz aus der Logarithmenrechnung lautet:

„Der Logarithmus der Basis ist gleich 1."

Erkl. 219. Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radikandus, geteilt durch den Wurzelexponenten.

und

$$a + bi = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

(nach Antwort auf Frage 57)

ist, so gibt:

$$a + bi = r\cdot e^{\varphi i}$$

und

$$l(a + bi) = l(r\cdot e^{\varphi i})$$

oder:

$$= lr + \varphi i le \quad \text{(n. Erkl. 206a)}$$

oder, weil $le = 1$ ist (nach Erkl. 218):

$$l(a + bi) = lr + \varphi i$$

Hierin bedeutet:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{(nach Antw. auf Frage 55)}$$

und φ einen, mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogen, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist (siehe Erkl. 98 und 98a), also:

$$\varphi = \text{arc}\cdot\text{tg}\frac{b}{a}$$

Man erhält demnach:

$$l(a + bi) = l\cdot\sqrt[2]{a^2 + b^2} + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

oder endlich, weil:

$$l\sqrt[2]{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}\cdot l(a^2 + b^2)$$

ist (nach Erkl. 219):

$$l(a + bi) = \frac{1}{2}l(a^2 + b^2) + i\cdot\text{arc tg}\frac{b}{a}$$

---

d) Ueber die Darstellung von $\cos^n\varphi$ und $\sin^n\varphi$ durch Exponentialreihen.

Frage 98. Wie lässt sich:

$$\cos^n\varphi$$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi$$
$$= 2\cos\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n\cdot\cos^n\varphi = e^{ni\varphi} + n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi}$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi}$$
$$+ \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} + \cdots$$
$$+ n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder (nach Erkl. 220):

Erkl. 220. Man erhält für:

$$e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} = e^{(n-1)i\varphi - i\varphi} \quad \text{(nach Erkl. 23)}$$

oder:

$$= e^{ni\varphi - i\varphi - i\varphi} = e^{ni\varphi - 2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi}$$

(nach Erkl. 26)

ferner für:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-2i\varphi} = e^{(n-2)i\varphi - 2i\varphi} =$$
$$e^{ni\varphi - 2i\varphi - 2i\varphi} = e^{ni\varphi - 4i\varphi} = e^{(n-4)i\varphi}$$

und so fort.

$$2^n \cdot \cos^n \varphi = e^{ni\varphi} + n e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} + \cdots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder, indem man das erste und letzte, zweite und vorletzte Glied u. s. w. zusammenfasst und die ganze Gleichung durch 2^n teilt:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) + n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) + \cdots\right]$$ (siehe Frage 100)

Frage 99. Wie lässt sich:

$\sin^n \varphi$

durch Exponentialreihen darstellen?

Antwort. Aus den Gleichungen:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

und

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

folgt:

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi - \cos\varphi + i\sin\varphi = 2i\sin\varphi$$

Demnach ist:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^n$$

oder nach dem binomischen Lehrsatze:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-1)i\varphi}\cdot e^{-i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-2)i\varphi}\cdot e^{-2i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-3)i\varphi}\cdot e^{-3i\varphi} - \cdots \mp n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi} \pm e^{-ni\varphi}$$

Ist n eine gerade Zahl, so ist $e^{-ni\varphi}$ positiv, also $n\cdot e^{i\varphi}\cdot e^{-(n-1)i\varphi}$ negativ (siehe Erkl. 202) und man erhält demnach mit Bezug auf Erkl. 220

bei geradem n

für:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \cdots - n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} + e^{-ni\varphi}$$

oder, indem man die ganze Gleichung durch $2^n \cdot i^n$ teilt:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

Ist n eine ungerade Zahl, so ist das letzte Glied der Reihe negativ, das vorletzte positiv (nach Erkl. 202) und es gibt hiernach

bei ungeradem n:

$$2^n \cdot i^n \cdot \sin^n \varphi = e^{ni\varphi} - n\cdot e^{(n-2)i\varphi} + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{(n-4)i\varphi} - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{(n-6)i\varphi} - \cdots + n\cdot e^{-(n-2)i\varphi} - e^{-ni\varphi}$$

oder endlich:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Frage 100. Wie lassen sich die in den Antworten auf die Fragen 98 und 99 abgeleiteten Formeln für:

$$\cos^n \varphi \text{ und } \sin^n \varphi$$

vereinfachen?

Erkl. 221. Wie aus nebenstehender Antwort ersichtlich ist, lassen sich mit Hilfe der Exponentialreihe genau dieselben Formeln für $\sin^n \varphi$ und $\cos^n \varphi$ ableiten, welche in den Antworten auf die Fragen 90 und 91 auf einem anderen Wege entwickelt wurden.

Antwort. Da nach der Antwort auf Frage 99:

$$e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi} = 2\cos n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi} = 2\cdot\cos(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi} = 2\cdot\cos(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist, so erhält man für:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) + n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) + \cdots\right]$$

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^n}\cdot\left[2\cos n\varphi + 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots\right]$$

oder, da sämtliche Glieder der eckigen Klammern den Faktor 2 besitzen, welchen man vor die Klammer setzen und gegen 2^n im Nenner fortheben kann:

$$\cos^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\left[\cos n\varphi + n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi + \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Ferner ergibt sich

bei geradem n

für:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[(e^{ni\varphi} + e^{-ni\varphi}) - n\cdot(e^{(n-2)i\varphi} + e^{-(n-2)i\varphi}) + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot (e^{(n-4)i\varphi} + e^{-(n-4)i\varphi}) - \cdots\right]$$

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[2\cos n\varphi - 2n\cos(n-2)\varphi + \frac{2n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

oder, weil:

$$i^n = i^{2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

ist und sich der Faktor 2 sämtlicher Glieder der eckigen Klammer gegen 2^n im Nenner forthebt:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n}{2}}}\cdot\left[\cos n\varphi - n\cdot\cos(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\cos(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

Endlich erhält man, weil:

$$e^{ni\varphi} - e^{-ni\varphi} = 2i\sin n\varphi$$

also auch:

$$e^{(n-2)i\varphi} - e^{-(n-2)i\varphi} = 2i\sin(n-2)\varphi$$

und

$$e^{(n-4)i\varphi} - e^{-(n-4)i\varphi} = 2i\sin(n-4)\varphi$$

u. s. w.

ist (nach der Antwort auf Frage 99)

bei ungeradem n

für:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^n\cdot i^n}\cdot\left[2i\sin n\varphi - 2ni\sin(n-2)\varphi + \frac{2\cdot n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}i\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

oder, weil sich die Faktoren 2 und i sämtlicher Glieder der Klammer gegen 2^n bezw. i^n im Nenner fortheben und

$$i^{n-1} = i^{2\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

ist:

$$\sin^n \varphi = \frac{1}{2^{n-1}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}}\cdot\left[\sin n\varphi - n\cdot\sin(n-2)\varphi + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\sin(n-4)\varphi - \cdots\right]$$

(vergl. Erkl. 221)

Anhang.

A. Verzeichnis der Resultate der ungelösten Aufgaben.

1) Imaginäre Zahlen.

Aufgabe 3. $\sqrt[2]{-121} = \pm 11\,i$; reeller Faktor rational

Aufgabe 4. $\sqrt[2]{-5} = \pm 2{,}236\cdots i$; reeller Faktor irrational

Aufgabe 6. a) $+1$, b) $+i$, c) -1, d) $-i$, e) $+1$, f) $-i$, g) -1, h) $+i$

Aufgabe 8. a) $-2i$, b) $-\frac{194x^2yi}{117z^2}$, c) $+59i\sqrt{5}$, d) $-\frac{ai}{3b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$, e) $+5i\sqrt{7}$, f) $+\frac{i}{x}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}$

Aufgabe 10. a) $+a^3$, b) $-\frac{x^4y^2}{z^2}$, c) $-10i$, d) $-6\cdot\left(3\sqrt{2}-4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, e) $y^2(z-x)$, f) $2\cdot(3\sqrt{10}-8)$, g) $+6$, h) $-(616{,}5+822\cdot\sqrt{2})\,i = 545{,}808\,i$

Aufgabe 13. a) -24, b) $+\frac{y}{x}i\sqrt{z}$, c) $-2{,}7$, d) $2\frac{1}{4}(1+i)$, e) $+3i$, f) $-3\frac{3}{20}+1\frac{1}{2}i$

Aufgabe 16. a) 64, b) $64i\sqrt{2}$, c) -128, d) $-128i\sqrt{2}$, e) $\frac{1}{36}$, f) $-\frac{i}{36\cdot\sqrt{6}}$, g) $-\frac{1}{216}$, h) $+\frac{i}{216\cdot\sqrt{6}}$

Aufgabe 17. a) $+\frac{a^2b}{c}$, b) $-32i\cdot\sqrt{\frac{1}{8}}$, c) $-a^{10}b^{10}\sqrt{ab}$, d) $-60\frac{3}{4}$, e) $+\frac{20}{2187}$

2) Komplexe Zahlen.

Aufgabe 19. a) $+5-33i$, b) $1+i$, c) 0; d) $+3{,}8i$, e) $-18+4\frac{3}{4}i$, f) $+24-57i$, g) $+\frac{14x}{y^2z^3}$

Aufgabe 23. a) $0{,}06i-0{,}03 = 0{,}03(2i-1)$, b) $8-i$, c) 25, d) $\frac{8}{9}$, e) $x\cdot(1-\sqrt{y}+y)+yi\sqrt{x}$, f) $a^2-b^2+c^2-2bci$,
g) $-41+i\left(30-42-28\sqrt{\frac{3}{2}}+30\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -41-22{,}82i = -(41+22{,}82i)$
h) $+\frac{4}{3}$

Aufgabe 24. Norm $= +225$, Modulus $= +15$

Aufgabe 25. Norm $= +2025$, Modulus $= +45$